

MEDVEGYEV PÉTER

## Néhány megjegyzés a kockázat, bizonytalanság, valószínűség kérdéséhez<sup>1</sup>

A címben említett három fogalom a közgazdasági elméletben központi szerepet foglal el. Ezek viszonya elsősorban a közgazdaságtudományi megismerés határait feszegeti. Mit tudunk a gazdasági döntésekről? Milyen információk alapján születnek a döntések? Lehet-e a gazdasági döntéseket „tudományos” alapra helyezni? A bizonytalanság kérdéséről az 1920-as években való megjelenése óta mindent elmondtak. Megvizsgálták a kérdést filozófiailag, matematikailag. Tárgyalták a kérdés számtalan elméleti és gyakorlati aspektusát. Akkor miért kell sokadszorra is foglalkozni a témával? A válasz igen egyszerű: azért, mert a kérdés minden szempontból ténylegesen alapvető, és mindenkor releváns. Úgy hírlík, hogy a római diadalmenetekben a győztes szekerén mindig volt egy rabszolga is, aki folyamatosan figyelmeztette a diadaltól megmámorosodott vezért, hogy ő is csak egy ember, ezt ne feledje el. A gazdasági döntéshozókat hasonló módon újra és újra figyelmeztetni kell arra, hogy a gazdasági döntések a bizonytalanság jegyében születnek. A gazdasági folyamatok megérthetőségének és kontrollálhatóságának van egy igen szoros korlátja. Ezt a korlátot a folyamatok inherens bizonytalansága adja. A gazdasági döntéshozók fülébe folyamatosan duruzsolni kell: ők is csak emberek, és ezért ismereteik igen korlátozottak. A „bátor” döntések során az eredmény bizonytalan, a tévedés azonban bizonyosra vehető.

Ebben az írásban a címben szereplő, szerteágazó kérdéskörnek csak egy szeletét próbálok körüljárni. Mondanivalóm lényege igen egyszerű: a tudományos elméletek legtöbbje komplementer, egymásnak esetleg logikailag ellentmondó, vagy legfeljebb lazán kapcsolódó modellek gyűjteménye. A logikai konzisztenciát csak egy modellen belül lehet és kell biztosítani. Teljes körű univerzális modellek nem építhetők. A tudomány csak képe a valóságnak, és nem maga a valóság. A fénykép vagy a festmény megragadhatja az ábrázolt személy lényeges vonásait, de maga a személy nyilván végtelenszer több, mint a fényképe. Hiába készítünk akárhány fényképet, rendezzük bármiképpen albumokba, az album lehet számítógépes vagy hagyományos, a képek alapján az élet nem rekonstruálható.

<sup>1</sup> A dolgozat az Alapítvány a Pénzügyi Kultúra Fejlesztésére által szervezett workshopon elhangzott előadás alapján készült. Az előadás során – és így a dolgozatban is – *Bélyác Iván* gondolataira próbálok reflektálni.

## KÖZGAZDASÁGTAN ÉS MODERNITÁS

A tudomány történetét szokás három periódusra bontani: premodern, modern és posztmodern. A legegyszerűbb kritérium, amellyel egy tudományos gondolatot a három kor valamelyikébe nagy pontossággal besorolhatunk, az a gondolat viszonya a józan észhez.<sup>2</sup> A józan ész mind a három korban kitüntetett szerepet játszott a megismerésben, de központi jelentőséget a modern tudományfelfogásban kapott: a felvilágosodással induló modernitás szerint a tudományos megismerés alapja ez. Egy tudományos elmélet nem mondhat ellent a józan észnek, és a modernitás szerint erre támaszkodva a világ megismerhető. Egy tudományos elméletnek egyszerűnek, szemléletesnek és bárki számára érthetőnek kell lennie. A józan ész által ellenőrzött megfigyelésekkel a világ összefüggései feltárhatók. A modernitás világában a matematika szerepe alapvető, ugyanis a matematikai nyelv adja azokat az eszközöket, amelyekkel a megismert világ egzakt módon leírható.<sup>3</sup>

Éppen ezért nem meglepő, hogy az első csapást a modernitásra éppen a matematika belső fejlődése hozta. Az első apró sebet a Bolyai-féle nem euklideszi geometria jelentette, amely az axiomatikus megközelítés szerepét hangsúlyozta; ám a halálos sebet a modernitás magabiztosságán az analízis fejlődése ejtette. 1861-ben *Karl Weierstrass* példát konstruált olyan folytonos függvényre, amely egyetlen pontban sem deriválható.<sup>4</sup> A példa jelentőségét nem lehet eléggé hangsúlyozni. Korábban többen belátni vélték, hogy minden folytonos függvény lényegében deriválható. A folytonos függvényekről a kutatóknak volt egy szemléletes képe, amelyhez több-kevesebb következetességgel definíciókat rendeltek: tetszőleges  $dx$  infinitezimális elmozdulás esetén az  $f(x+dx)-f(x)$  eltérés szintén infinitezimális. Vagyis az értelmezési tartományon való végtelen kicsi elmozdulás esetén az elmozdulás az érték-készleten is végtelenül kicsi. A Weierstrass-féle ellenpélda azért megdöbbentő, mert kiderült, hogy a matematika objektumai távolról sem szemléletesek. A folytonos, de nem deriválható függvény szemléletileg elképzelhetetlen, és nyíltan ellentmond mindannak, amit a függvényekről a kutatók korábban gondoltak.<sup>5</sup> Ráadásul később az is kiderült, hogy a példa

2 Az angol megfelelő, a common sense jobban érzékelteti a fogalom lényegét, mivel a tudás közösségi jellegét hangsúlyozza, és így kizárja minden mélyreható, speciális előtanulmány vagy látásmód szükségességét.

3 A posztmodern megközelítés egy fontos vetülete, hogy az „igazság” fogalmát a matematikába számúzi. A matematikában egy állítás igaz, ha az axiómákból levezethető. A tudományos állítások nagy része azonban nézőpont és előzetes kondicionáltság kérdése. A különböző modellek matematikai igazsága egymásnak ellentmondhat, így az objektív igazság illúzió. Ez a közgazdaságtanban és általában a társadalomtudományokban nyilvánvaló. A társadalomról szóló elméletek részei a társadalmi gondolkodásnak, attól elválaszthatatlanok. Ennek az az oka, hogy például a gazdasági folyamatok közvetlenül nem figyelhetők meg, az objektív valóság a „józan észre” támaszkodva, közvetlenül nem tárható fel. De mit kezdjen a „common sense” egy olyan természettudományos kísérlettel, amelyet több ezer ember közreműködésével évekig készített, hatalmas eszközzel végeznek el, és a megválaszolandó kérdés megértéséhez is több évtizedig tartó előtanulmányok kellene?

4 Szokás azt mondani, hogy a matematika fejlődése körülbelül ötven-száz évvel jár a többi tudomány előtt. Kétségtelen, hogy a matematika belső problémái idővel visszahatnak a társtudományokra is. Ennek az az oka, hogy minden tudományosnak mondható elmélet matematikai nyelven fejezi ki magát, és az új matematikai gondolatok letisztulásához több generációnak kell elteltie.

5 Ráadásul ennek a megértéséhez az analízis pontos tudása, így komoly előtanulmányok szükségesek. Érdemes hangsúlyozni, hogy az analízis alapjainak rendbetétele szorosan kapcsolódik az egyetemi oktatás „tömegesedéséhez”. A 19. század közepén a matematika oktatása a korábbiakhoz képest tömegessé vált, így a hallgatók számára szükségessé vált az alapok egyértelművé tétele. Paradox módon a 21. századra jellemző tömegoktatás éppen az ellenkező irányba terelte a képzést.

egyrészt nem elszigetelt, egy sor hasonlóan paradox függvény konstruálható; másrészt a folytonos, de nem deriválható függvények központi szerepet játszanak a sztochasztikus folyamatok elméletében, hiszen az elmélet alapkövének, a Wiener-folyamatnak a trajektóriái éppen ilyen paradox függvények. Mivel a sztochasztikus folyamatok elméletét a tudományok széles körében felhasználják, a Weierstrass-féle példa felfoghatatlansága, elképzelhetetlensége átöröklődött szinte a teljes tudományos gondolkodásra.

Hosszabb távon a példa a matematikában – és azon keresztül a tudomány teljes területén – kiprovokálta az axiomatikus gondolkodás megerősödését, illetve elterjedését, valamint a matematikán belüli egyeduralmát. Ugyanakkor a példa nagyban hozzájárult a matematika és a fizika eltávolodásához<sup>6</sup>, illetve a matematika absztrakt volta miatti, természetes „elszigetelődéséhez”.

A társadalomtudományokban a modernitás alap gondolata szerint a társadalom, a gazdaság a kutatók által megérthető, és szükség szerint átalakítható. Ezt a felfogást a legelőmőbbben Marx fejezte ki: „*A filozófusok a világot csak különbözőképpen értelmezték; a feladat az, hogy megváltoztassuk.*”<sup>7</sup> Ez a fajta önbizalom azonban történetileg nem tűnik igazolhatónak. Ahogyan a folytonos függvény naiv fogalma nem ad útmutatást a matematikában, ugyanúgy a társadalmi igazságosság naiv eszméje nem ad útmutatást a társadalmi folyamatok módosítása során. Weierstrass példájának hatására a matematikusok egyre körültekintőbben kezdtek fogalmazni, egyre inkább a gondolatok konzisztenciáját, a megoldások létezését, a fogalmak hierarchiáját hangsúlyozták. Hasonlóan, a közgazdaságtanban a modernítésre jellemző világmegváltás helyét egyre inkább a modellek körültekintő elemzése, a belső gondolati tisztázás, a komplementer, sőt direkt ellentmondó iskolák egyidejű létezése veszi át.

A modellekben való gondolkodás legfőbb előnye, hogy automatikusan kikényszeríti a pontos és árnyalt nyelvi struktúrák létrejöttét. Nagyon fontos hangsúlyozni, hogy a pontos fogalomalkotás az egyik olyan alapvető hozzáadéka a matematikai oktatásnak, amelynek a jelentőségét sokszor alábecsülik. Nyilvánvalóan, mint mindennel, evvel is vissza lehet élni, és egy lényegében strukturálatlan vagy teljesen kiüresedett gondolatrendszer is le lehet írni strukturáltnak látszó formátumban. Ugyanakkor a matematikai szövegek kötött kánonja – amely szerint a tételeket és a definíciókat külön kiemeljük, még vizuálisan sem keverjük az indoklást a fogalomalkotással – alapvetően a gondolati tisztaság tükröződése. A fogalmak hierarchiája, a pontos és finom fogalomalkotás minden cselekvés alapja. Miként Szász János dolgozatában találóan megjegyzi, a kockázat és bizonytalanság fogalom pár tudatos használata már önmagában is rendkívüli érték. Az árnyalt és körültekintő fogalomalkotás, a megfelelő nyelvi elemek megtalálása és a szaknyelvbe való következetes bevezetése nélkül a gazdasági élet fejlődése korlátokba ütközik – ugyanúgy, mintha valamelyik erőforrás lenne szűkös. Miként a dolgozat igen találóan hangsúlyozza: a hazai közgazdaságtudomány irányításának sarkalatos problémája lényegében definíciós, fogalmi jellegű. Hogy a zavar mögött milyen érdekek húzódnak meg, az más lapra tartozik, de úgy tűnik, a gazdasággal

<sup>6</sup> Ennek az az oka, hogy az axiomatikus módszer miatt a matematika egyre inkább az általános és nem a speciális megértésére törekedett.

<sup>7</sup> KARL MARX [1845]: Tézisek Feuerbachról (11), [www.marxists.org/magyar/archive/marx/misc/misc-feuerbachrol.doc](http://www.marxists.org/magyar/archive/marx/misc/misc-feuerbachrol.doc)

foglalkozó, egyes tudományterületek definíciós elhatárolódásának hiányosságai igencsak befolyásolják a tudományterülettel foglalkozó döntéshozók tisztánlátását. Így a fogalmi tisztázatlanság és a nem eléggé árnyalt definíciós struktúra része a problémának, és ez a hazai gazdaságtudományok egészére vagy oktatásának intézményi rendszerére akár végzetes következményekkel is járhat.

Az axiomatikus gondolkodás, a belső strukturális, fogalmi elemek feltárása a matematikában páratlan, és minden tudomány által követendőnek ítélt világosságot teremtett. Természetesen semmi sincs ingyen. A matematika önmaga felé fordulásáért fizetett ár, miként már korábban megjegyeztem, a fizikával és általában a természettudományokkal való, évszázados kapcsolatának a fokozatos lazulása. A közgazdaságtanban ez az ár a nagy társadalmi folyamatok megértéséről való lemondás. A jelenkori közgazdasági elmélet a hangsúlyt az egyéni érdekre helyezte, és a társadalmat egyének összegének tekinti. Sem az osztály, sem a nemzet fogalma nem igazán illik bele a közgazdasági elméletbe. Az elmélet szerint a társadalom célja a hatékony állapot létrehozása, amely olyan állapot, ahol mindenki eléri a maga feltételes szélsőértékét, így az adott korlátok között a helyzetén nem tud változtatni. Hogy a korlátok micsodák, miből erednek, miként változtathatók, érdektelen. Paradox módon, miközben a fizika távolodik a matematikától, a közgazdaságtan éppen a matematika absztraktságában találja meg legfőbb támaszát. A matematika egyik fő fogyasztójává a közgazdaságtan válik.<sup>8</sup>

Természetesen a józan észre, sokszor a józan paraszti észre hivatkozó közgazdászok joggal jegyzik meg, hogy így a közgazdaságtan bizonyos értelemben kiüresedik, ugyanis lemond a nagy társadalmi folyamatok magyarázatáról. Ez természetesen így is van. A félreértés általában abban rejlik, hogy ezt nem tudatlanságból, dogmatikus szűklátókörűségből vagy tudományos gőgből teszi, hanem a negatív történelmi tapasztalatok miatt, éppen hogy tudatosan. A nagy társadalmi kérdések megérthetőségének illúziójából azonnal következik a világmegváltás igénye, amely ez idáig történetileg soha nem vezetett semmi jóra. Történetileg a társadalmi folyamatok megismerésében a bizonytalanságot tagadó, a „valóság lényegének” megismerhetőségét állító elméletek megvalósítása során a hosszú távú, társadalmi szintű, absztrakt érdeksérelmek rövid távú, egyéni szintű, konkrét sérelmekké transzformálódtak.

## A BIZONYTALANSÁG ÉS A POSZTMODERN KÖZGAZDASÁGTAN

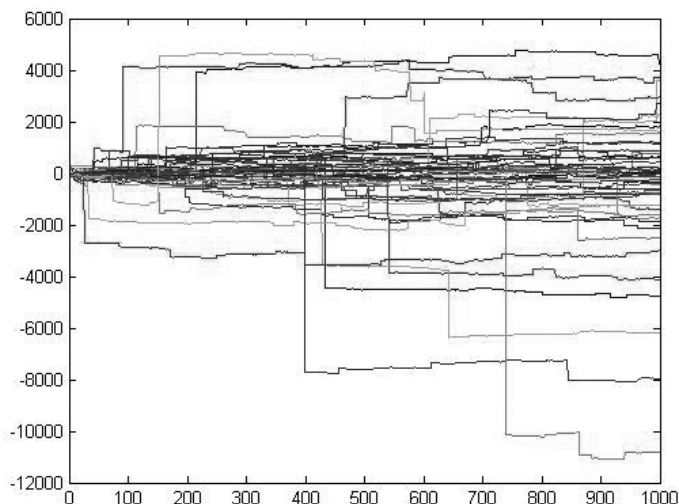
Ha azonban a közgazdasági gondolkodás tengelyébe az egyén döntési problémája kerül, akkor kézenfekvő, hogy felmerül a bizonytalanság megléte esetén való döntés kérdése; ugyanis nem kétséges, hogy a gazdaság szereplői a döntéseket bizonytalan feltételek között hozzák. A bizonytalanságnak az az oka, hogy a társadalmi rendszerek nagyon érzékeny, időben kialakuló és folyamatosan újraalakuló érdekütközések egyensúlyából állnak. Minden beavatkozás ebbe az áttekinthetetlenül komplex érdekhálóba számtalan mellékhatással

<sup>8</sup> Ez azért van így, mert a közgazdaságtani modellek paraméterei gyakran becsülhetetlenek, így az állításokat széles lehetséges paraméter- vagy modellosztályokra kell kimondani. A matematikára jellemző, axiomatikus megközelítést a közgazdasági elmélet teljesen magáévá tette. Egy elméleti közgazdasági cikk megértéséhez az olvasónak mély és részletekbe menő matematikai háttérrel kell rendelkeznie.

jár. Az időleges egyensúlyok felbomlása folyamatos és kiszámíthatatlan kaszkádatásokat eredményez. A kockázat és a bizonytalanság közötti eltérés definíciójakor arra az alapvető felismerésre szokás hivatkozni, hogy a társadalmi folyamatok ismételtetősége lehetetlen. Ahhoz, hogy a statisztika eszközeit érdemben használni tudjuk, független, azonos eloszlású és igen nagy számú megfigyelésre van szükség. Az első két feltételből lehet engedni, körültekintő modellezéssel a stacionaritás és a függetlenség megkötései enyhíthetők; de a nagy számok törvényében a nagy szó nem véletlenül szerepel. A valószínűség-számítás lényegét megfogalmazó nagy számok törvényében a nagy szó nagyon nagyot jelent. Főleg akkor, ha az elvárt pontosság szintén nagyon nagy. A gazdasági folyamatokban már néhány százalékos eltérés is igen nagy számot számít. Nem mindegy, hogy 3% vagy 4% az éves hiány. A nagy pontosságú előrejelzések igénye közvetlenül ellentmond az igen kis számú megfigyelés tényének. Ebből ered a bizonytalanság fogalma. Bizonytalanságról akkor beszélünk, ha a statisztikai eszközökkel nem tárhatók fel a döntési paraméterek.<sup>9</sup>

1. ábra

### Cauchy-folyamat szimulálása



Ha elegendő mennyiségű és minőségű megfigyelésünk van ahhoz, hogy a statisztikai eszközeit használjuk, akkor kockázatról beszélünk. Az említett ellentmondás miatt a valódi közgazdasági döntések szinte kizárólag mindig bizonytalanság mellett történnek. Az is világos, hogy a kockázat és a bizonytalanság közötti különbség éppen a gazdasági folyamatok megismerhetőségének kérdése. A bizonytalanság szerepének elismerése éppen a posztmo-

<sup>9</sup> A bizonytalanságról akkor szokás beszélni, amikor a változók eloszlása nem ismert, és a lehetséges eloszlásokról csak vélekedések vannak. Ugyanakkor elképzelhető, hogy ismerjük az eloszlást, de az olyan „vad” folyamatot eredményez, hogy az egyébiránt ismert eloszlás a döntéshozónak semmilyen útmutatást nem ad. Az 1. ábrán látható, úgynevezett Cauchy-folyamat számítógépes szimulációval készült; de milyen módon lehetne egy ilyen folyamat esetén döntést hozni?

dem megközelítés becsempészése a közgazdasági elméletbe. A bizonytalanság bevezetése a közgazdasági elméletbe az egyértelmű és „helyes” döntés lehetetlenségének implicit elismerését jelenti. Bizonytalanság esetén nincs olyan egyértelmű kritérium, amelynek a segítségével az „igazi” döntés megtalálható. Egy döntés helyes vagy helytelen volta sok szempontból szubjektív megítélés tárgya.

A túlzott absztrakció elkerülése érdekében példaként tekintsük a pénzügyi elmélet központi formuláját, a jövőbeli bizonytalan kifizetések jelenbeli árának kérdését. A jelenben fizetett árról szóló döntés során két, egymással szorosan összefüggő tényezőt kell figyelembe venni: miként transzformálódik az érték az időtengely mentén, illetve miként transzformálódik az érték a bizonytalanság által? A nevezetes formula szerint, amely minden tankönyvben szerepel, egy jövőben esedékes, bizonytalan kifizetés jelenben fizetendő ára a jövőbeli kifizetés diszkontált várható értéke. Az egyetlen gond csak az, hogy nem ismerjük sem a diszkontfaktort, sem a várható érték kiszámolásához szükséges eloszlást. A lényeges gondolat az, hogy a várható érték képzéséhez szükséges eloszlás statisztikai módszerekkel nem tárható fel, mert a modellben nincs semmilyen ismétlődés. Hangsúlyozni kell, hogy a diszkontált várható kifizetés képletében a várható értéket nem a nagy számok törvénye kényszeríti ki. Nem arról van szó, hogy egy sokszor ismétlődő, véletlen játékokban az egyes kimenetek árának a megfelelő valószínűségekkel kell arányosnak lennie. A képletben szereplő várható érték egy „várható érték”-szerű matematikai objektum, amely elsősorban az árfüggvény linearitása miatt matematikailag származtatható.<sup>10</sup>

Az árak mindig a kereslet-kínálat szabályai szerint alakulnak. A pénzügyekben azonban egy további feltétel is teljesül. A termékek cseréje, a portfóliók készítése lényegében korlátlan módon megvalósítható. Ennek az az oka, hogy sem a csere, sem a portfólióképzés során nem merülnek fel érdemben tranzakciós költségek. Ennek következményeképpen az árfüggvény lineáris. Egy portfólió értékének a kiszámításakor az árvektort és a mennyiségekből álló vektort skalárisan össze kell szorozni. Ha ezt az elvet átvisszük a bizonytalan kifizetések esetére, akkor egy súlyfüggvény szerinti integrálként kapjuk a jövőbeli kifizetések árát.<sup>11</sup> Ezen a ponton egyetlen valódi matematikai probléma jelentkezik: miként kapjuk a súlyfüggvényt? A legegyszerűbb esetben az egyes véletlen eseményekhez kötött, egységnyi kifizetések, az úgynevezett Arrow–Debreu-termékek rendelkeznek árral. Vagyis vannak olyan termékek, amelyek pontosan akkor fizetnek egy egységet, ha egy adott esemény bekövetkezik. Természetesen ezek a termékek nemcsak léteznek, hanem feltételezzük, hogy az áruk is ismert. Mivel az árazóképlet a tranzakciós költségek elhanyagolhatósága miatt lineáris, ezért két diszjunkt esemény esetén az egyesítés ára a két ár összege. Következésképpen az Arrow–Debreu-termékek árai egy additív mértéket definiálnak a lehetséges események terén. Mivel tetszőleges véletlen kifizetés az Arrow–Debreu-termékek véges vagy végtelen lineáris kombinációja, ezért a jövőben esedékes kötelezettség ára egyértelműen előáll az Arrow–Debreu-termék szorzatösszegeként. Ahol persze végtelen elemű lineáris kombináció esetén nem összeget, hanem annak folytonos párhát, valamilyen integrált kell venni. A figyelmes és a matematikában jártas olvasó észreveheti, hogy a tranzakciós költségek hiányából csak egy additív mérték létezését lehet garantálni. Ez azonban olyan technikai probléma, amely

<sup>10</sup> Erre később még visszatérünk.

<sup>11</sup> Minden integrál valójában egy súlyozott összeg.

standard módon áthidalható.<sup>12</sup> A nagy problémát nem ez jelenti, hanem az Arrow–Debreu-árak létezésének önkényes feltétele. Ha ilyen termékek nincsenek – márpedig a valóságban ilyenek nyilvánvalóan nincsenek –, akkor a gondolatmenetet ki kell egészíteni. Első lépésben az árfüggvényt ki kell terjeszteni az Arrow–Debreu-termékekre! Ezt igen széles körben érvényes, egyszerű matematikai feltételek esetén meg lehet tenni.<sup>13</sup> Az egyetlen gond, hogy ez a kiterjesztés matematikailag nem egyértelmű. Vagyis bizonytalanság melletti döntés esetén egy, az árfüggvény által definiált mérték szerinti várható értéket kell venni, amelynek nincsen semmiféle valószínűség-számítási háttere.

Mivel az árazó mérték nem egyértelmű, ezért a létezés ténye közvetlenül nem sok mindenre használható. Így jutunk el a pénzügyi eszközök árazásának központi fogalmához: a kalibrációhoz. A kalibráció azt jelenti, hogy valahogyan kiválasztjuk a lehetséges mértékek közül az „igazi” mértéket. De miként tehetjük meg ezt? Elméletileg a piaci szereplők hasznossági függvényei alapján. Ugyanakkor a hasznossági függvény a közgazdasági elmélet legkevésbé megfogható eleme. Alapvetően a piaci szereplők megfigyelhetetlen, szubjektív érzéseit tükrözi. Éppen ezért a keresett, illetve a statisztikai illesztés folyamán megtalált árazó mértéket tekinthetjük szubjektív valószínűségnek is. Ez a valószínűség a piaci szereplők bizonytalansággal kapcsolatos preferenciáit tükrözi vissza.<sup>14</sup> Az árazáskor használt valószínűség csak formailag valószínűség, valójában a félelmek mértéke.<sup>15</sup> Azt mutatja, hogy egy Arrow–Debreu-termék által nyújtott biztosításért mennyit hajlandó a piac fizetni. Ez nem feltétlenül arányos az adott esemény bekövetkezésének valószínűségével, még akkor sem, ha ilyen valószínűség esetleg értelmezhető. Ha egy kísérlet sokszor bekövetkezik, akkor feltehetően, de nem feltétlenül a valós valószínűség és a félelmek által vezérelt biztosítási költség esetleg közelíteni fog egymáshoz. De erre semmi garancia nincsen. Az árazásban szereplő valószínűség az árakat meghatározó hasznosságoknak a piaci verseny által némiképpen átkódolt tükörképe. Lényegében érdektelen, hogy az egyes kimenetek bekövetkezéséhez a piaci szereplők milyen szubjektív vagy statisztikailag kimért valószínűségeket rendelnek, illetve, hogy az egyes kimenetek eredményétől mennyire félnek a piaci szereplők. A két kérdés az adott kimenettől való félelem árában összeolvad. Az árazó valószínűség a megfigyelt árakból elvileg visszaolvasható. A kalibráció során tehát a ténylegesen megfigyelt árakból matematikai módon visszakövetkeztetünk az aktuális „igazi” árazó mértékre. Az árazó valószínűség nem „statisztikai” valószínűség, a nagy számok törvénye alapján nem becsülhető, de a tény-

12 A könnyű matematikai kezelhetőség miatt ugyanis a modellekben az additivitásnál többre van szükség, a mértéknek bizonyos értelemben folytonosnak,  $\sigma$ -additívnek is kell lennie, egyébként az integrálható függvények köre túl szűk lenne. Ez azonban olyan távolról sem triviális matematikai problémákat vet fel, amelyekről most nagyvonalúan eltekintünk. A kérdéskörrel kapcsolatos legfontosabb ismereteket *Badics Tamás* dolgozata foglalja össze.

13 A legegyszerűbben az úgynevezett Hahn–Banach-tétellel hivatkozva tehetjük meg. Érdemes hangsúlyozni, hogy ez a közgazdaságtanban gyakran hivatkozott szeparációs tétel igen közeli rokona, és mint ilyen, tipikus egzisztenciátétel.

14 A konkrét mérték meghatározása azért is bonyolult, mert a hasznossági függvények közvetlenül a kereslet-kínálatra hatnak, így az aktuális, a piacon megfigyelhető mérték a piaci egyensúlyban kialakult, közös becslés mérték.

15 Valójában nem tudjuk, hogy az egyes súlyok miből származnak. Abból, hogy a piaci szereplők bizonyos valószínűségeket gondolnak, vagyis a súly nagysága egy szubjektív érzés? De az is lehet, hogy bizonyos kimenettől való félelem következtében alakul ki a súly.

leges piaci helyzetből az értéke a kalibrációs eljárás során statisztikailag kikövetkeztethető.<sup>16</sup> Amit azonban így meghatároztunk, az a piaci szereplők ilyen-olyan valószínűségi becsléseinek és félelmeinek kereslet-kínálati egyensúlya, ami nagyon távol lehet a valószínűségektől. És ebből a szempontból teljesen mindegy, hogy ezt a valószínűséget milyen tapasztalati alapon – a priori érzés vagy relatív gyakoriság alapján – becsültük.

## VALÓSZÍNŰSÉG ÉS KOCKÁZAT

Miként láttuk, a bizonytalanság melletti döntés elmélete szerint formailag úgy kell eljárni, mintha kockázat mellett döntenénk; vagyis mintha a valószínűség-számítás szabályai szerint kellene döntenünk. A formai azonosság és az erre támaszkodó esetleges analógia azonban veszélyes illúzió. Természetesen bármit el lehet nevezni bárminek. A kereslet-kínálat által meghatározott árazó funkcionált reprezentáló mértéket is el lehet nevezni ilyen-olyan valószínűségnek. Ennek indokaként fel lehet hozni, hogy matematikailag a valószínűség-számítás valószínűségi mértéke azonos matematikai objektum, mint az árazó valószínűség. Mind a kettő  $\sigma$ -additív halmazfüggvény. Vagyis a matematikai absztrakció szintjén a két objektum azonos. Ezen a ponton azonban az analógiák véget érnek. A legnagyobb problémát az jelenti, hogy szemben az árazáskor használt súlyokkal, a valószínűség-számítás szabályairól mindenkinek van egy meglehetősen pontos képe. A statisztikai valószínűséggel – főleg a gyermekkorban játszott, különböző játékok során – mindenki meglehetősen szoros kapcsolatba kerül. Mindenkinek van egy intuitív képe a függetlenségről, a nagy számok törvényéről stb.<sup>17</sup> Azonban ez a kép vélhetőleg a korlátlan ismételtetésre épül. Ezért ennek a képnek az átvitele az árazáskor használt súlyokra torz és helytelen képet ad a gazdasági döntések belső összefüggéseiről. A valószínűség-számítás által tárgyalt és a legtöbb emberben meglehetősen kép a relatív gyakoriság határértékére épülő valószínűség fogalma, ami nagyon más intuíción alapján alakul, mint a véletlentől való félelem mértékének piaci egyensúlya.

A valószínűség-számítás axiómái szerint a valószínűség egy az alaphalmazon egy értéket felvevő, nem negatív mérték. Ennek az alapján matematikailag végül is a valószínűség-számítás a mértékelméletnek nevezett matematikai terület egy speciális fejezete. Ez azonban, miként már többször jeleztük, félrevezető megközelítés. A modern matematika axiomatikus felfogása miatt minden matematikai objektum esetén egyedül az axiómákból következő, strukturális tulajdonságok számítanak. A matematikai objektumok valós élete azonban csak részben következik az axiómákból. A matematika emberi tevékenység eredménye, amelynek során a kutató valamilyen külső, megoldandó probléma miatt foglalkozik matematikával. A valószínűség-számítással foglalkozó kutató által elfogadott, intuitív kép persze nem befolyásolja az állítások igaz vagy hamis voltát. Ilyen értelemben a strukturális szabályok döntöek.

<sup>16</sup> Legalábbis ezt állítja az elmélet.

<sup>17</sup> Ez önmagában is igen vitatható és igen izgalmas kérdés. Úgy tűnik, hogy a valószínűség fogalma az emberi gondolkodásban nagyon mélyen gyökerezik. Elképzelhető, hogy a környezethez való alkalmazkodáshoz nem csak azt kell pontosan felmérni, hogy milyen messze van a támadó oroszlán vagy a kívánatos gyümölcs, hanem azt is, hogy mekkora eséllyel tudunk egy adott irányba menekülni, vagy az ételmezt megszerezni. Vagyis az esélylatolgatás esetleg ösztön szinten is kódolva lehet, és ezért érezzük a valószínűséget igen kézenfekvő fogalomnak.



Ugyanakkor nem elég igaz tételt mondani. Egy tételnek ezenkívül szépnek, mélynek, valamint egyszerűnek, de mégis nagyszerűnek kell lennie. Ezek a kategóriák azonban már nem kötődnek az axiómákhoz, hanem a vizsgált terület belső, valójában specifikus tulajdonságai által vannak determinálva. A geometria része az algebrának. De a geometriatételek igazolása-  
kor nagyon ritkán használunk közvetlenül algebrát. És amikor például koordinátagéometriát használunk, a tényleges algebrai probléma kitzűzések a geometriai kérdések az irányadók. A matematika – miközben az állítások igaz voltát az axiómákból vezeti le – az állításaihoz az inspirációt a társtudományokból szerzi.

A tudományos megismerés kulcseszköze az analógia. Az árazó valószínűség fogalmával kapcsolatos, legnagyobb gond az, hogy egy formai azonosságra támaszkodva, hamis analógiát sugall.

Itt érdemes röviden elgondolkodni a valószínűség matematikai fogalmáról. A Kolmogorov-féle valószínűségi axiómák kapcsán mindig el szokás mondani, hogy az elmélet egy hosszabb fejlődés eredménye, és Kolmogorov előtt voltak más próbálkozások is. Ezek a relatív gyakoriság fogalmát állították a vizsgálat középpontjába. A Kolmogorov-féle elmélet legfőbb előnye azonban az volt, hogy sikerült az akkor igen elvontnak számító mérték- és integrálmélet keretébe beilleszteni a valószínűség-számítást. A Kolmogorov által belátott nagy számok törvénye alapján a számtani átlag egy valószínűséggel pontosan akkor tart a várható értékhez, ha a várható értéket az absztrakt mértékelmélet szabályai szerint számoljuk. Ezzel a felismeréssel Kolmogorov a mértékelméletet a modern matematika középpontjába helyezte.<sup>18</sup>

Miközben a valószínűség-számítás matematikai elmélete sok kérdést megválaszolt, egyet biztosan nyitva is hagyott. Mikor nevezünk egy számsorozatot véletlennek? A véletlen számsorozat intuitíve világos fogalmát Kolmogorov helyettesítette a független, azonos eloszlású valószínűségi változók sorozatával. Miközben egy számsorozatról nem tudjuk eldönteni, hogy véletlen-e, egy jóval bonyolultabb fogalomról, egy függvényesorozatról el tudjuk dönteni ugyanezt. A probléma ezzel nem ért véget; ugyanis az az állítás, amely szerint egy véletlen függvényesorozat helyettesítési értékeiből álló sorozat véletlen, nem igaz. Ha valami értelmeset akarunk a kérdésben mondani, akkor azt tudjuk mondani, hogy ez a tulajdonság egy valószínűséggel igaz, de jóval helyesebb azt mondani, hogy a véletlen sorozat fogalma nem igazán illeszkedik a jelenkori valószínűség-számításba.<sup>19</sup>

Ez persze egy igen zavaró probléma, amelyre több kutató is próbált választ adni. Az egyik lehetőséget a kiszámíthatóság elmélete adja. Egy sorozat akkor véletlen, ha a sorozat szeleteit reprodukálni képes számítógépes programok hossza a sorozat hosszával egyenes arányban nő. Némiképpen elnagyolva: az olyan számítógépes programok, amelyek képesek kiírni a sorozat elemeit, végtelen sok utasításból állnak, és lényegében végtelen sok olyan nyomtatási

18 A mértékelmélet fontosságát feltáró másik elmélet a magyar matematika talán legnagyobb büszkeségének, *Riesz Frigyesnek* a nevéhez fűződik. Az ő nevét viselő reprezentációs tétel szerint igen széles körülmények között a folytonos lineáris funkcionálok alkalmas mértékek szerinti integrálként írhatók fel. A pénzügyben használt matematikai elméletek a piaci árakat meghatározó valószínűségek létezését feltételezve – végső soron a Riesz reprezentációs tételt használva – formailag valószínűséget konstruálnak. Ezeknek a súlyoknak valószínűségként való interpretációja lényegében összekeveri a „szezon” a „fazonnal”.

19 Vegyük észre, hogy a helyzet emlékeztet a *Weierstrass* által adott példára. Az intuitív, naiv felfogás matematikailag gyakran nem támasztható alá; nem építhető olyan matematikailag konzisztens modell, amely tükrözi az intuitív képet. A maximum, ami elvárható, hogy az intuitív és a matematikai modell minél több szempontból egybeessen.

utasítást tartalmaznak, amelyek közvetlenül, minden számítást mellőzve, kiírják az éppen esedékes elemet; vagyis az input oldalt átmásolják az output oldalra. Az elmélet elsőre nagyon elgondolkodtató. Sajnos, mindjárt másképpen látjuk azonban a hatókörét, ha ebben a fogalomrendszerben megpróbáljuk megfogalmazni például a centrális határeloszlás tételét.

## ÖSSZEFOGLALÁS

Minden tudomány, akár a matematika, akár a közgazdaságtan kísérlet arra, hogy megértsük a minket körülvevő vagy a bennünk levő világot. Ez hol sikerül, hol nem. Szinte mindig – vagy tán mindig – csak részben sikerül.<sup>20</sup> Miközben a valószínűség-számítás alapjai számos szempontból nem kielégítőek, és nagyon sokszor a módszer része a megoldandó problémának, matematikusok több generációjának a kezén megfordulva, azzá alakult, ami. Számomra úgy tűnik, hogy a bizonytalanság melletti döntések problémájára, minden formális azonosság ellenére, a valószínűségi gondolkodás nem alkalmazható. Az ilyen-olyan valószínűség terminológiájában való gondolkodás természetes módon olyan intuíciókat eredményez, amelyek hamis következtetésekre sarkallnak. Nem tudok erre jobb példát, mint a CDO- vagy a CDS-árazás. A CDO-k esetén a magasabb emeletek alacsony bedőlési valószínűségére valószínűségi analógiák alapján következtetett a pénzügyi világ. A szituációt sztochasztikusnak gondolták, miközben az lényegében determinisztikus volt. Feltételezték, hogy az egyedi bedőlési idők egy olyan statisztikai sokaságot alkotnak, amelynek az elemei enyhén korrelálnak. Ezért a szemük előtt levő piaci szituáció helyett a modelljeiknek hittek. Ennek következményei közismertek. De a CDS-ek árai sem a tényleges bedőlési valószínűségeket tükrözik, hanem azt a piaci folyamatot, amely a bedőlésekre való fogadások miatt kialakult.<sup>21</sup> A kereskedőket nem a tényleges fundamentum változása izgatja, hanem az árváltozásból származó veszteségtől való félelem.<sup>22</sup> Ezért minden lényeges vagy lényegtelen hírre a piaci szereplők meg-

20 Ezen a ponton is óvatosan kell azonban fogalmazni. Nem lehet figyelmen kívül hagyni azt a fontos tény, hogy a jelenkori műszaki civilizáció az emberi megismerés páratlan bizonyítéka. Az agnoszticizmus nem mindig és minden területen a helyes ideológia. A helyes agnoszticizmusból származó kétely nagyrészt a társadalmi megismerésre korlátozódik. Miközben az emberi tudomány és megismerés páratlan eredményekre vezetett, a társadalmi folyamatok megértése nem tűnik megoldottnak. Nekem úgy tűnik, hogy fiatalabb korban a társadalmi folyamatokba való beavatkozást a tudományra hivatkozva folytatták a kor uralkodói. A Szovjetunió minden kétséget kizárólag a tudomány és a világ megismerésének nagy támogatója volt. Nem csak azért, mert Nagy Péter óta minden uralkodó tudta, hogy a fegyvereket a tudósok készítik. Ezért is, de azért is, mert a rendszer ideológiailag alapvetően a világ megismerhetőségére épült. Ugyanakkor nem hagyhatjuk figyelmen kívül azt sem, hogy a pénzügyi világ a jelentős jövedelmek indokaként szintén a kiemelkedő szaktudást szokta felhozni. Ugyanakkor a gazdasági döntések bizonytalanságából kiindulva tagadni a technikai civilizáció eredményeit, nagyfokú képmutatás. Az, hogy a pénzügyi Nobel-díjak legtöbbször kiderült, hogy légvárépítés és szellemes porhintés, még nem jelenti azt, hogy ez minden Nobel-díjra igaz. Általános tendencia, hogy a politika és a hatalom szeret a nagy teljesítmények fényében fürödni, hátha abból rá is áramlik valami. És valóban, nincs fényesebb dolog, nagyobb dicsőség, mint az ember által teremtetett világot átható tudomány fénye.

21 A kérdést részletesen tárgyalja Szász János dolgozata. Érdemes arra is odafigyelni – miként a dolgozat kiemeli –, hogy nem mindegy, pénzügyi vagy reálopcióról beszélünk-e.

22 A CDO-kat szokás az egyes emeleteket elöntő víz analógiájával leírni. Minél magasabb emeleten vagyunk, annál nagyobb biztonságban vagyunk. De ha emelkedik a víz, a mentőcsónak ára nemcsak az emelet magasságától, nemcsak a víz emelkedési szintjétől és sebességétől függ, hanem attól is, hogy hány mentőcsónak van, a többi lakó mennyre fél, és mennyre rohanja meg az éppen elérhető csónakokat.

próbálják kitalálni a tényleges piaci reakciót, függetlenül attól, hogy a hír miként befolyásolta a tényleges csőd valószínűségét. Nem arra figyelnek, hogy mi történik a fundamentumokkal, hanem arra, hogy mit gondolhatnak a többi piaci szereplők a különböző hírekről, és az egyes hírek eladásra vagy vételre serkentik-e a piac többi szereplőjét.

A modern közgazdaságtan egyik fundamentális észrevétele a kockázat és a bizonytalanság különbsége. A bizonytalanság melletti döntés kérdése alapvetően korlátozza a közgazdasági, így többek között a pénzügyi döntések lehetőségét. A kockázat feltárására, eliminálására számos lehetőséget tartalmaz az irodalom. Ugyanakkor, függetlenül attól, hogy ezeket milyen hatékonysággal hajtják végre a piaci szereplők, az inherens bizonytalansággal nem tudnak mit tenni. Bizonytalanság melletti döntés esetén az egyetlen lehetséges megoldásnak a „több szem többet lát” módszere tűnik. Az optimális, igaz döntés lehetetlensége nem teszi szubjektívvá a rossz vagy előkészítetlen döntés fogalmát. A statisztikai módszerek által nyújtott, objektív kritériumok azonban nagyrészt illúziók, amelyek – minden kifinomultságuk ellenére – csak a múlt alapján következtetnek a bizonytalan, és így inherens módon ismeretlen jövőre.

Ugyanakkor a bizonytalanság és a kockázat megkülönböztetése is csak egy elmélet, amelynek az igaz vagy hamis volta nem vehető fel. Egyetlen döntési szituációban sem lehetünk biztosak abban, hogy kockázattal vagy bizonytalansággal állunk-e szemben, vagyis soha sem tudhatjuk előre, hogy az előrejelzések nem bizonyulnak-e végül igazaknak.

## IRODALOMJEGYZÉK

- BADICS TAMÁS [2011]: Arbitrázs, kockázattal szembeni attitűd és az eszközárzás alaptétele. *Hitelintézet Szemle*, 10. évf. 4. sz., 325–335. o.
- BÉLYÁCS IVÁN: Kockázat, bizonytalanság, valószínűség. *Hitelintézet Szemle*, 10. évf. 4. sz., 289–313. o.
- ITÓ, K.–PROKHOROV, YU. V. (szerk.) [1983]: *Probability Theory and Mathematical Statistics, Lecture Notes in Mathematics 1021*. Springer Verlag, Berlin
- KOCH, K. R. [2007]: *Introduction to Bayesian Statistics*, Springer Verlag, Berlin
- KOVÁCS ERZSÉBET [2011]: Kockázat mint látens fogalom. *Hitelintézet Szemle*, 10. évf. 4. sz., 349–359. o.
- KOLMOGOROV, A. N. [1983]: On logical foundations of probability theory. In ITÓ, K.–PROKHOROV, YU. V. (szerk.), 1–6. o.
- SZÁZ JÁNOS [2011]: Valószínűség, esély, relatív súlyok. *Hitelintézet Szemle*, 10. évf. 4. sz., 336–348. o.
- SZÉKELY GÁBOR [1986]: *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*, D. Reidel Publishing Company, Akadémiai Kiadó, Budapest