Értékpapírok

Tartalom

1 Diszkontpapírok árazása

A diszkontpapírok rögzített lejáratú hitelpapírok. Egyetlen jövőbeli pénzáramlásuk van, lejáratkor a kibocsátó a névértéket fizeti ki a papír birtokosának.

- Éven túli lejáratú: elemi kötvény (diszkontkötvény)
- Rövid lejáratú:
  - rövid lejáratú állampapír (diszkontkincstárjegy)
  - váltó

1.1 Diszkontkötvények árazása

Az elemi kötvény diszkontpapír, vásárlója egyetlen jövőbeli pénzáramlásra számíthat, a lejáratkor a névérték visszafizetésére. Formailag nem kamatozik, éves névleges kamatlábát 0%-nak tekintjük, nincs kamatjövedelme, ezért kamatszelvény nélküli kötvénynek (zéró kuponnak) is nevezik. A kötvény árfolyama névérték alatt volt, kibocsátása névérték alatt van, hozama kizárólag árfolyamnyereségből származik.

$$PV = \frac{N}{(1 + r_n)^n}$$

Ahol N - az elemi kötvény névértéke (Nominal Value),
PV - az elemi kötvény árfolyama (diszkontérték),
n - lejáratig hátralévő futamidő években,
r_n - az n éves befektetés elvárt hozama.

1. **példa**

Egy 5 éve kibocsátott, 10 év futamidejű 100.000 Ft névértékű elemi kötvénytől a befektetők 6%-ot várnak el. Mekkora a diszkontkötvény árfolyama?

$$PV = \frac{100.000}{(1+0{,}06)^5} = 74.725{,}82\ Ft$$

1.2 Diszkontkincstárjegy árfolyama

A diszkontkincstárjegy rövid lejáratú (maximum 1 éves futamidejű) állampapír, amely csak futamidejében tér el az elemi kötvénytől. (360 napos évvel számolnak)

$$PV = \frac{N}{1 + r_n * \frac{n}{360}}$$

Ahol N - a diszkontkincstárjegy névértéke (Nominal Value),
PV - a diszkontkincstárjegy árfolyama (diszkontérték),
n - lejáratig hátralévő futamidő napokban, (francia módszer)
r_n - az n éves befektetés elvárt hozama.

2. **példa**

Egy féléves diszkontkincstárjegy hátralévő futamideje 63 nap. A befektetők 4%-os hozamot várnak el. Mekkora a diszkontkincstárjegy elméleti árfolyama?

$$PV = \frac{100\%}{1 + 0{,}04 * \frac{63}{360}} = 99{,}30\%$$

1.3 Váltómatematika

A váltó is olyan értékpapír, amely lejáratkor a névértékét fizeti ki a birtokosának.

3. **példa**

Március 20-án kibocsátottak egy hat hónapos lejáratú 1 millió forint névértékű váltót, melyet egy vállalat számos forgatás után bankjának benyújt leszámítolásra június 20-án. A bank 15%-os diszkontlábat alkalmaz. A vállalat folyószámlahitelének kamatlába 17%-os, melyen jóval 1 millió forint feletti ki nem használt keret van.

a) *Mennyit fizetne a bank a váltóért, ha egyéb díjakat nem számolna fel?*

b) *Mekkora hitelkamatlábnak felel meg a diszkontláb?*
c) *Mekkora a váltónak az a maximális futamideje, aminél rövidebb futamidő esetén érdemesebb a váltót leszámítolni és ennél hosszabb futamidő esetén, gazdaságosabb folyószámlahitelt felvenni?*

Angol kamatszámítást tételezzünk fel!

Megoldás

A leszámítolás esetében az időarányos kamatot (diszkont) levonják a váltó névértékéből. A leszámítolás képlete:

$$PV = N - K = N - N \times d \times n = N \times (1 - d \times n)$$

Ahol N - a váltó névértéke (Nominal Value),
PV - a váltóért fizetett összeg (diszkontérték),
d - diszkontláb,
n - lejáratig hátralévő futamidő években,
K - levont kamat nagysága.

A váltó 6 hónapos lejáratú, tehát szeptember 20-án jár le. A kibocsátás dátuma a leszámítolás szempontjából nem érdekes. A leszámítolás időpontjától a váltó benyújtásáig eltelt futamidő az angol módszer szerint 92 nap. (11+31+31+19). Az év napjainak száma 365.

$$PV = N \times (1 - d \times n) = 1.000.000 \times \left(1 - 0{,}15 \times \frac{92}{365}\right) = 962.192$$

A bank 962.192 Ft-ot fizet a váltóért.

Mekkora hitelkamatlábnak felel ez meg? A képletet megkapjuk, ha ugyanazt a kamatmennyiséget először az előleges, majd az utólagos kamatszámítás képletével is kifejezzük és a két kamatmennyiséget egyenlővé tesszük, majd a jelenérték helyébe behelyettesítjük a diszkontálás képletét, egyszerűsítünk és r-re rendezünk.

$$N \times d \times n = K = PV \times r \times n$$
$$N \times d \times n = N \times (1 - d \times n) \times r \times n$$
$$d = (1 - d \times n) \times r$$
$$r = \frac{d}{1 - d \times n}$$

$$r = \frac{d}{1 - d \times n} = \frac{0{,}15}{1 - 0{,}15 \times \frac{92}{365}} = 0{,}1559 \approx 15{,}6\%$$

A kapott eredmény 15,6%. Mivel a folyószámla-hitel kamata ennél magasabb, érdemesebb a váltót leszámítoltatni és hitelt nem felvenni.

Látható, hogy a diszkontlábnak megfelelő hitelkamatláb mindig magasabb, mint a diszkontláb, mivel a nevező 1 és 0 közé esik. A képletből az is kitűnik, hogy a két kamatláb közötti különbség a hátralévő futamidőtől is függ. Minél nagyobb n értéke, annál nagyobb a különbség. Bizonyos esetekben érdemes megtudni azt a maximális futamidő nagyságot, amin belül a váltót érdemes már leszámítoltatni, változatlan hitel- és váltókondíciókat feltételezve.

$$N \times d \times n = K = PV \times r \times n$$
$$N \times d \times n = N \times (1 - d \times n) \times r \times n$$
$$d = (1 - d \times n) \times r$$
$$d = r - d \times n \times r$$
$$r - d = d \times r \times n$$
$$n = \frac{1}{d} - \frac{1}{r}, \text{ha r} > \text{d}$$

Ha a hitelkamatláb kisebb, mint a diszkontláb, akkor hitelt felvenni mindig érdemesebb, mint váltót leszámítoltatni.

$$n = \frac{1}{0{,}15} - \frac{1}{0{,}17} = 0{,}7843$$

Ha a váltó lejáratig hátralévő futamideje 0,78 évnél rövidebb, már érdemesebb leszámítoltatni, mint hitelt felvenni. A 0,78 év 286 napnak, azaz durván 9,5 hónapnak felel meg. Mivel a váltó hátralévő lejárata 3 hónap volt, nem véletlen, hogy a 2. kérdés megválaszolásakor azt kaptuk, hogy a váltót érdemesebb leszámítoltatni.

4. példa

Tételezzük fel, hogy egy váltó lejárata december 5. A váltó névértéke 1 millió forint, a kiváltott követelés értéke 850 ezer forint volt, a kibocsátás pedig augusztus 21-én történt. A váltó birtokosa az így jellemezhető értékpapírt október 20-án benyújtja bankjához leszámítolás végett. A pénzintézet az ügylet során 25%-os diszkontlábat és angol kamatszámítási módszert alkalmaz.

a) *A váltó birtokosa a művelet révén mekkora összeghez jut?*
b) *Mekkora hitelkamatnak felel ez meg?*

Megoldás

$$PV = 1000000 \times \left(1 - 0{,}25 \times \frac{46}{365}\right) = 968493$$

$$r = \frac{d}{1 - d \times n} = \frac{0{,}25}{1 - 0{,}25 \times \frac{46}{365}} = 0{,}2581 \approx 25{,}8\%$$

2 Kamatszelvényes kötvények árazása

Ebben a részben a több kifizetést teljesítő papírok árfolyamszámításával foglalkozunk.

Azt a maximális árfolyamot, melyen még hajlandók vagyunk megvásárolni az adott értékpapírt, az értékpapír belső értékének nevezzük. Egy értékpapír (és bármely vagyontárgy) belső értéke az adott értékpapír pénzáramainak jelenértékösszege.

A belső érték számításának általános képlete, tehát megegyezik a jelenérték-számítás általános képletével.

$$PV = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^i}$$

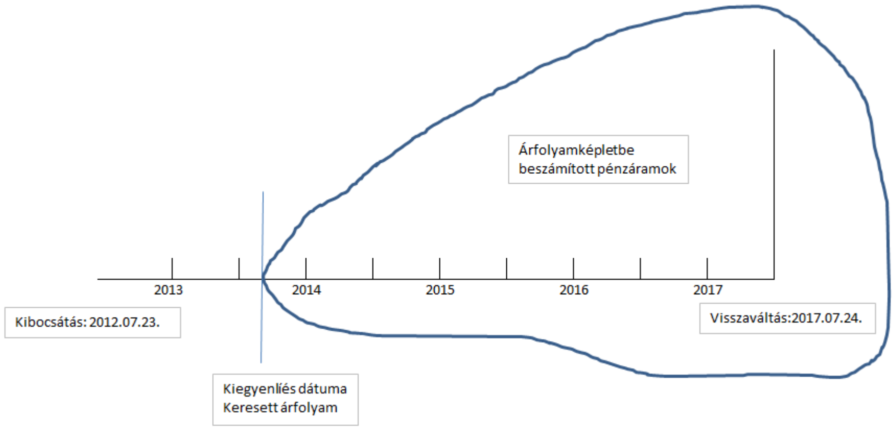
Ahol PV - az értékpapír belső értéke,
n - az értékpapírból származó pénzáramok darabszáma,
i - futóindex 1-től n-ig,
Ci - i-dik időpontban esedékes pénzáram,
r - adott értékpapírtól elvárt hozam.

5. példa

A 2017/I jelű államkötvényt 2012. július 23-án bocsátották ki fix 6%-os kamat mellett. A kötvény 2017. július 24-én jár le és félévente fizet kamatot, július 24-én és január 24-én. Mekkora a kötvény belső értéke 2013. október 19-én, ha a befektető által elvárt hozam 5%?

A pénzáramsor egy olyan fix kamatozású kötvényre jellemző, mely egy összegben lejáratkor fizeti vissza a tőkerészt. A belső értéket csak a még ki nem fizetett pénzáramok határozzák meg. Az ábráról leolvasható, hogy 8 kamatot és a tőkerészt nem fizették még ki. A kötvény árfolyamát általában a névérték százalékában szokták megadni, két tizedesjegy pontossággal.

Megoldás



$$PV = c \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^k} + \frac{100\%}{(1+r)^n} = c \times AF_{r,n} + N \times DF_{r,n} = c \times \frac{(1+r)^n - 1}{r \times (1+r)^n} + \frac{100\%}{(1+r)^n}$$

Ahol c – kötvény kamatlába %-ban,
r - a befektető által elvárt hozam,
n - a kamatfizetések száma,
$AF_{r,n}$ - annuitásfaktor adott r és n esetén,
$DF_{r,n}$ - diszkontfaktor adott r és n esetén,
N – kötvény névértéke,
PV - a kötvény belső értéke a következő kamatfizetés előtt egy járadékközzel.

Az összeg első tagja a kamatok jelenértékét, míg a második a kötvény tőkerészének jelenértékét testesíti meg. Mivel minden kamatfizetés azonos nagyságú, ezek annuitást alkotnak, és jelenértéküket megkapjuk, ha a kamatlábat megszorozzuk az annuitásfaktorral. A képlet a kötvény árfolyamát egy járadékközzel a következő kamatfizetés előtt mutatja meg. Példánkban a következő kamatfizetés 2014.01.24-én esedékes, így a képlet a 2013. július 24-i árfolyamot fogja megadni.

A képlet alkalmazásához meg kell határozni az időszaki (féléves) elvárt hozamot.

$$r_{eff} = (1 + r^*)^m - 1$$

$$r^* = \sqrt[m]{1 + r_{eff}} - 1 = \sqrt[2]{(1 + 0{,}05)} - 1 = 2{,}47\%$$

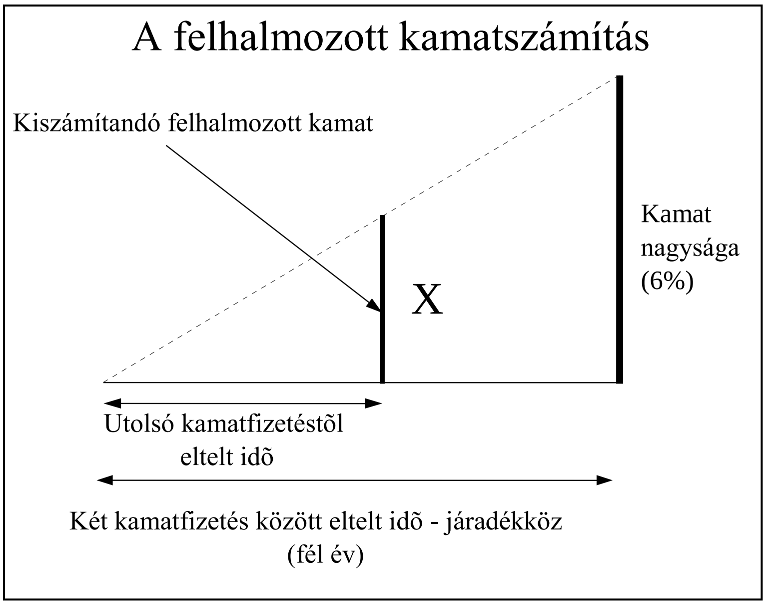
$$PV = c * \frac{(1+r)^n - 1}{r * (1+r)^n} + \frac{100}{(1+r)^n} = 3 * \frac{1{,}0247^8 - 1}{0{,}0247 * 1{,}0247^8} + \frac{100}{1{,}0247^8} = 103{,}81\%$$

A kötvény árfolyama a névérték 103,81%-a lett volna 2013.07.24-n, ha az elvárt hozam ebben az időpontban évi 5% lett volna. A 103,81% a 2017/I kötvény nettó árfolyama.

A kötvény nettó árfolyama megmutatja, hogy mekkora a kötvény belső értéke egy járadékközzel a következő kamatfizetés előtt, ha a jelenleg érvényes elvárt hozammal számolnánk.

A feladattal még nem vagyunk készen. Ugyanis az árfolyamot nem júliusra, hanem október 10-re szeretnénk meghatározni. A pontos árfolyam meghatározására több megközelítés áll a rendelkezésünkre.

Felhalmozott kamat számítása



A kamatfizetés után a kötvény árfolyama pontosan a kifizetett kamat nagyságával csökken, ha minden más feltétel változatlan marad. Az idő múlásával a következő kamatfizetés fokozatosan beépül az árfolyamba. A felhalmozott kamatszámítás feltételezi, hogy ez a beépülés folyamatos és egyenletes.

Az egyenlő szárú háromszögek törvényéből következik, hogy a keresett X úgy aránylik az utolsó kamatfizetéstől eltelt időhöz, ahogy a kamat nagysága aránylik a járadékközhöz. A fennálló egyenes arányosságot X-re rendezve megkapjuk a felhalmozott kamat nagyságát.

$$\frac{X}{t} = \frac{c}{T} \Rightarrow X = \frac{c \times t}{T}$$

Ahol c - járadékközönként kifizetett kamat nagysága,
T - járadékköz hossza,
t - utolsó kamatfizetéstől az árfolyamszámításig eltelt idő,
X - felhalmozott kamat nagysága.

Az utolsó kamatfizetés 2013. július 24-én volt. Október 19-ig 87 nap telt el.

$$X = \frac{c * t}{T} = \frac{6\% * 87}{365} = 1{,}43\%$$

Bruttó árfolyam= 103,81%+1,43%=105,24%

6. példa

Tételezzük fel, hogy egy 100 000 Ft névértékű, 2012. január 15-én kibocsátott 4 éves lejáratú, 7%-os névleges kamatozású kötvényt kívánunk megvásárolni 2013. december 18-án. A kamatfizetés félévente történik, résztörlesztésről nincs szó, tehát a névértéket lejáratkor egy összegben fizetik. A befektetéstől elvárt hozamunk 10%. Befektetjük-e megtakarításaink egy részét a fenti kötvénybe, ha annak a vásárlás napjára vonatkozó hivatalos árfolyama 98 500 Ft?

Megoldás

$$r^* = \sqrt[m]{1 + r_{eff}} - 1 = \sqrt[2]{(1 + 0{,}1)} - 1 = 4{,}88\%$$

$$PV = c * \frac{(1 + r)^n - 1}{r * (1 + r)^n} + \frac{100}{(1 + r)^n} = 3{,}5 * \frac{1{,}0488^8 - 1}{1{,}0488 * 1{,}0488^8} + \frac{100}{1{,}0488^8} = 94\%$$

A behelyettesítés után látjuk, hogy a nettó árfolyam 94%-os. Mivel kötvényünk névértéke 100 000 Ft, így ez 94 000 Ft-nak felel meg. Ezek után számoljuk ki a felhalmozott kamatot:

$$X = \frac{c * t}{T} = \frac{7\% * 156}{365} = 2{,}99\%$$

A névértéket figyelembe véve a felhalmozott kamat nagysága 2 990 Ft. Az eredmény felhasználásával a kötvény bruttó értéke a vásárlás napján, a befektető által elvárt hozam mellett:

$$P_{bruttó} = 94.000\ Ft + 2.990\ Ft = 96.990\ Ft$$

A 96.990 Ft kevesebb a kínált eladási árnál, vagyis a 98 500 Ft-nál. Ezért, ha a befektető ragaszkodik a 10%-os hozamelvárásához, akkor más befektetés után kell néznie, tehát ilyen áron nem vásárolja meg a kötvényt.

3 Részvények árfolyama és hozama

7. példa

Egy elsőbbségi részvényt bocsátottak ki 2010. június 10-én 12%-os garantált osztalékfizetési ígérettel. Az osztalékot minden év június 10-én fizetik ki. Mekkora az elsőbbségi részvény belső értéke 2013. február 20-án, ha a befektető által elvárt hozam 20%?

Megoldás

Nettó árfolyam meghatározása:

$$PV = \frac{c}{r} = \frac{12\%}{20\%} = 60\%$$

Felhalmozott kamat:

$$X = \frac{c * t}{T} = \frac{12\% * 255}{365} = 8{,}38\%$$

Bruttó árfolyam: 60%+8,38%=68,38%

Június 10-től a következő év február 20-ig 255 nap telik el. (21+31+31+30+31+30+31+31+19). A bruttó árfolyam így 60%+8,38%=68,38% lesz.

8. példa

Egy elsőbbségi részvényt bocsátottak ki 2004. május 10-én, 12%-os garantált osztalékfizetési (C) ígérettel. Az osztalékot minden év május 10-én fizetik ki. Mekkora az elsőbbségi részvény belső értéke 2010. február 20-án, ha a befektető által elvárt hozam (r) 20%?

Megoldás

Az elsőbbségi részvény nettó árfolyamát az örökjáradék képletébe helyettesítve kapjuk meg:

$$PV_{nettó} = \frac{C}{r} = \frac{12\%}{20\%} = 60\%.$$

Az elsőbbségi részvény nettó árfolyama 60%. A részvényt viszont nem az osztalékfizetés napján vásároljuk, ezért a kötvényeknél tanultak mintájára következő lépésként meg kell határozni a felhalmozott kamatot. Ez a vásárlást megelőző osztalékfizetéstől a vásárlásig eltelt időszakra eső kamat nagyságával egyenlő. Május 10-e és február 20-a között eltelt idő 286 nap. Ez az év 286/365-öd része. A felhalmozott kamat ennek ismeretében:

$$K_{felhalmozott} = 12\% \cdot \frac{286}{365} = 9{,}4\%.$$

Az elsőbbségi részvény bruttó árfolyamát a nettó árfolyam és a felhalmozott kamat összegeként kapjuk:

$$PV_{bruttó} = PV_{nettó} + K_{felhalmozott} = 60\% + 9{,}4\% = 69{,}4\%.$$

A részvény bruttó árfolyama a vásárlás napján 69,4%. Ha a példában megadjuk a részvény névértékét is, ami legyen most 1 000 Ft, akkor az elsőbbségi részvényünk belső értéke 694 Ft lesz.

9. példa

A Magyar telekom részvény 2012-ben 9%-os osztalékot fizetett. Tételezzük fel, hogy az osztalék hosszú távú növekedési rátája 12%. Osztalékot a részvényre június 10-én fizetnek. A részvénytől elvárt hozam 15%. Mekkora a részvény belső értéke 2012. december 10-én, ha tudjuk, hogy a részvény névértéke 100 Ft?

Megoldás

Törzsrészvények esetén az árfolyam meghatározása a növekvő örökjáradék segítségével történik. Ebben az esetben feltételezzük, hogy az osztalék az idő múlásával folyamatosan növekszik egy állandó százalékkal a végtelenségig.

A törzsrészvény nettó árfolyamát a növekvő örökjáradék képletébe helyettesítve kapjuk meg.

Részvény nettó árfolyama

$$PV = \frac{c_0 * (1+g)}{r-g} = \frac{9\% * 100Ft * (1+12\%)}{15\% - 12\%} = 336Ft$$

Felhalmozott osztalék

$$X = \frac{c_1 * t}{T} = \frac{9\% * 100Ft * (1+12\%) * 183}{365} = 5{,}05Ft$$

A bruttó árfolyam 341,05 Ft

A vásárlásra vonatkozó döntést a kötvények árfolyamszámításánál már megismert logika alapján hozhatjuk meg. Vagy mégsem? Részvények esetén legyünk óvatosak. A matematikai módszerek, ha mégoly tökéletesnek tűnnek is nem alkalmasak minden folyamat leírására. A kötvényeknél a fix kamat, meghatározó a vásárló döntési motivációit illetően. A bemutatott matematikai módszerek azonban a mindenkori hozamok ismeretében nyújtanak segítséget az adott értékpapírokra, befektetésekre vonatkozó döntéseket illetően. A részvények esetén a hozam(ráta), vagyis az osztalék, nem a fő motiváló tényező a vásárlási döntés meghozatalakor. A részvények hozamában ugyanis a kötvényekhez viszonyítva meghatározó nagyságrendet tesz ki a részvény árfolyamváltozása, amelyhez viszonyítva jóval kisebb jelentőségű az általa fizetett osztalék. A tanult és alkalmazott matematikai módszereink viszont az árfolyamváltozást nem tudják kezelni, így az nem is jelenik meg az eredményeinkben.

10. példa

Egy törzsrészvényre ebben az évben 9%-os osztalékot fizettek. Tételezzük fel, hogy az osztalék hosszú távú növekedési rátája (g) 12%. Az osztalékot minden év június 10-én fizetik. A részvénytől elvárt hozam (r) 15%. Mekkora lesz a részvény belső értéke (bruttó árfolyama) tárgyév december 20-án, ha tudjuk, hogy a részvény névértéke 1 000 forint?

Megoldás

Részvény nettó árfolyama

$$PV = \frac{c_0 * (1+g)}{r-g} = \frac{9\% * 1.000Ft * (1+12\%)}{15\% - 12\%} = 3.360Ft$$

Felhalmozott osztalék

$$X = \frac{c_1 * t}{T} = \frac{9\% * 1.000Ft * (1+12\%) * 193}{365} = 53{,}3Ft$$

A bruttó árfolyam 3.413,3 Ft