Tartalom

1 A pénz időértékének elve

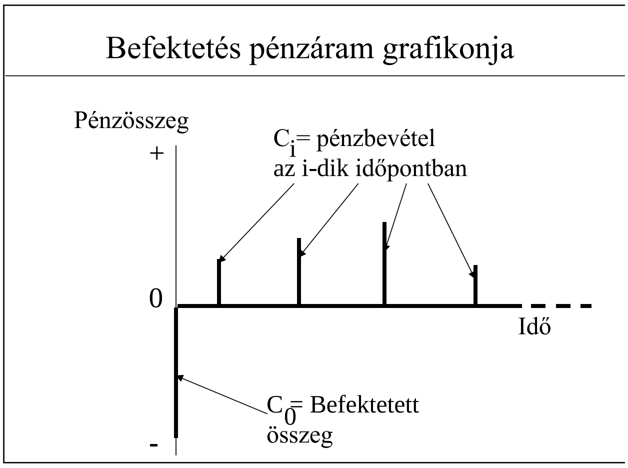
A pénzügyi életben gyakran különböző időpontban esedékes pénzeszközöket illetve pénzforrásokat kell összehasonlítani. Egy befektetési/beruházási döntés esetén nagy összegű pénzt adunk ki a jelenben és a jövőben keletkeznek belőle bevételek. Hitelfelvétel vagy általában a finanszírozási döntések esetén pedig nagy összegű pénzbevételt kapunk a jelenben és a jövőben lesznek esedékesek a pénzkiadások.

A befektetési és finanszírozási döntések szemléltetésére úgynevezett pénzáram-grafikonokat használunk.

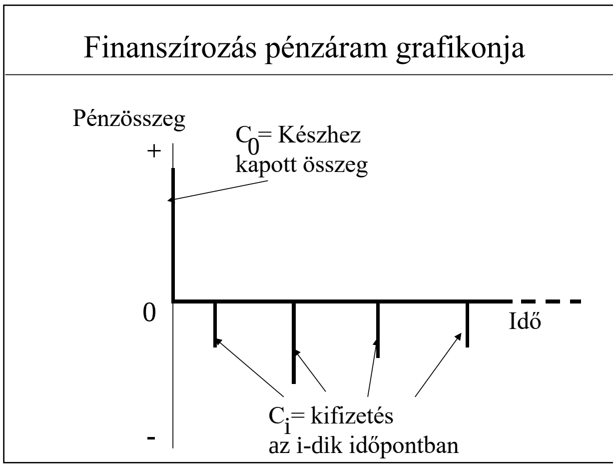
A pénzáram egy adott időtartam alatt befolyó pénzbevételek és kiáramló pénzkiadások sorozata. A pénzáram-grafikon a pénzáramot szemléltető jelölésrendszer.

A későbbiekben ezt a jelölésrendszert sokszor fogjuk alkalmazni. A grafikon vízszintes tengelye az időtengely, a függőleges tengelyen az esedékes pénzösszegeket ábrázoljuk. A lefelé húzott vonal azt jelenti, hogy ott a gazdálkodó alanynak pénzkiadása van, ha felfelé húzunk vonalat, akkor ott a gazdálkodó alanynak pénzbevétele keletkezik. A vonal hossza a pénzösszeg nagyságától függ.

1.1. Ábra



1.2. Ábra



Ahol C_i az i-edik időpontban esedékes pénzösszeg (Cash). Ha a C előjele pozitív, pénzbevételünk van, ha a C előjele negatív pénzkiadásunk van.

A pénz időértékének elve alapján, a különböző időpontbeli pénzek különböző értékkel rendelkeznek, jövőbeli forintjaink értéke nem egyezik meg a jelenben felhasználható, egyébként számszerűen ugyanakkora összeget kitevő forintjaink értékével, egységnyi mai pénz többet ér, mint egységnyi pénz holnap

1. **példa**

   Egy ismerősünk kölcsönkér ma tőlünk 500 000 Ft-ot és azt ígéri, hogy egy év múlva 600 000 Ft-ot fizet majd nekünk vissza.

   Kölcsön adjuk-e neki a pénzt?

Megoldás

Azt kell eldöntenünk, hogy mi ér többet: a ma felhasználható 500 000 Ft, vagy az a 600 000 Ft, amit egy év múlva kapunk meg.

Ahhoz, hogy a befektetési vagy finanszírozási döntést meghozhassuk, szükségünk van valamilyen módszerre, amelynek segítségével a különböző időpontban esedékes pénzösszegeket, vagy jövedelemáramlási elemeket „közös nevezőre” hozhatjuk.

Meg kell tudnunk mondani, hogy 1 Ft mai pénz, mennyi pénzt ér a jövőben, illetve, hogy a jövőbeli pénzek mennyit érnek ma. A továbbiakban a jelen időpont a 0-dik időpont, amit t0-lal jelölünk. Ennek megfelelően az 1 év múlva esedékes időpontot t1-gyel, a 2 év múlva esedékes időpontot t2-vel jelöljük.

A „közös nevező” először a Jelenérték, a technikai segédlet pedig a diszkonfaktor (DFr,n), amely megmutatja, hogy egy n év (időszak) múlva esedékes pénzegység mekkora értéket képvisel a jelenben.

$$DF_{r,n} = \frac{1}{(1+r)^n},$$

Ahol *r* a számításoknál alkalmazott kamatláb
n az időszakot jelenti.

Ennek segítségével már könnyen megoldhatjuk az alábbi azonosság felhasználásával, hogy a jövőben (*n* év múlva) esedékes pénzösszegnek (C_n) mekkora a jelenértéke. (*PV- Present Value):*

$$PV = C_n * DF_{r,n} = C_n * \frac{1}{(1+r)^n}$$

Ahol C_n – n időszak múlva kapott pénzösszeg,
PV – jelenérték (Present Value),
r – az adott időszakban érvényes elvárt hozamráta.

Egy jövőben esedékes pénzösszeg jelenértéke megmutatja, hogy mekkora összeget kellene befektetnünk a jelenben az elvárt hozammal ahhoz, hogy az esedékes pénzösszeget kapjuk meg az adott jövőbeli időpontban.

Akkor tudunk helyesen dönteni, ha megvizsgáljuk, hogy egy hasonló feltételű, általunk hozzáférhető befektetési lehetőségnek mekkora a hozamrátája. Ezt a hozamrátát várjuk el mi is hitelnyújtásunktól. Az elvárt hozamrátát a tőke alternatíva költségének vagy feláldozott hasznának is nevezik, hiszen ettől a hozamtól elesünk, ha az adott befektetést választjuk.

A hozamráta a befektetett tőkén felüli többletpénzbevétel (hozam) a befektetett tőke %-ában kifejezve és évesítve.
A hozamráta jele az r (return).

a, Ha ezen egyszerű számítások során 15%-os kamatlábat használunk, az egy év múlva esedékes 600 000 Ft jelenértéke az alábbi módon alakul:

$$PV = \frac{600\,000}{(1+0{,}15)^1} = 521\,739{,}13\ Ft \quad ,$$

tehát az 1 év múlva esedékes 600 000 Ft számunkra ma nagyjából 521 739 Ft-ot ér, hozamelvárásaink alapján legfeljebb ennyi pénz adnánk neki kölcsön, megéri tehát az üzlet

b, Ha csak 8%-os hozamelvárásunk van:

$$PV = \frac{600\ 000}{(1+0{,}08)^1} = \ 555\ 555{,}56\ Ft\ ,$$

ebben az esetben is megéri az ügylet.

c, Ha 25%-os hozamelvárásunk van:

$$PV = \frac{600\ 000}{(1+0{,}25)^1} = \ 480\ 000\ Ft,$$

ebben az esetben már nem éri meg az ügylet.

$\downarrow$

Az elvárt hozam és meghatározása kulcsfontosságú.

Az elvárt hozamot meghatározó tényezőket az alábbi ábra mutatja.

Az ábrából látható, hogy az "r" nagyságát részben makroökonómiai tényezők határozzák meg, melyek eredménye a **kockázatmentes hozam** (a gyakorlatban az adott befektetés lejáratának megfelelő állampapír hozamát tekintjük kockázatmentes hozamnak[1]). A kockázatmentes kamatlábat két tényezőre bonthatjuk, az inflációra és a reálkamatlábra.

Ha az éves kockázatmentes hozamráta időszakunkban 4%, ez azt jelenti, hogy minden befektetett 100 Ft-ra 4 Ft többletpénzt (hozamot) kapunk évente.

[1] Valójában azonban az állampapírok sem kockázatmentesek, hiszen a kibocsátó állam csődje esetén a befektetés visszafizetése veszélybe kerülhet, vagy a futamidő előtti visszaváltás esetén a befektetett tőke visszafizetésére többnyire nincs állami garancia (csak a futamidő végén történő visszafizetésre).

A befektetés nominális vagy névleges hozamrátája megmutatja, hogy befektetett pénzünk egy egységére mekkora pénzösszeget kapunk a befektetett tőkénken felül egy év alatt.

A makrotényezőkön túl a konkrét befektetés két jellemvonása befolyásolhatja az elvárt hozamot:

- a befektetés **likviditása**
- a befektetés **kockázata**

A befektetés likviditása megmutatja, hogy milyen gyorsan és mekkora tranzakciós költségek mellett lehet a befektetést készpénzre váltani. A likvid befektetések esetében a készpénzre váltás gyorsan és nagyobb költségek nélkül megtörténhet. Az illikvid befektetések készpénzre váltása hosszabb időt vesz igénybe és/vagy nagy a tranzakciós költsége.

Az elvárt hozam és a likviditás egymással fordítottan arányos. A likvid befektetésektől elvárt hozam alacsonyabb, mint az illikvid befektetésektől. A befektetők jobban kedvelik azokat a befektetéseket, amelyeket könnyebb mobilizálni és ezért alacsonyabb hozamokkal is megelégszenek.

A befektetések kockázata megmutatja, hogy a befektetés-értékelési változó várható értékétől átlagosan milyen mértékben térhetnek el a változó tényleges értékei.

Pénzügyi befektetéseknél a befektetés hozamrátája alapján döntünk. A várható értéktől vett átlagos eltérést a statisztikából ismert szórással mérjük. Minél nagyobb a tényleges értékek szórása a várható érték körül, a befektetésnek annál nagyobb a kockázata. Feltételezzük, hogy ha egy befektetés kockázata nő, az elvárt hozam növekszik. A befektetők a jövőbeli bizonytalanság ellensúlyozásáért hozamkompenzációt várnak el.

Az 1. példában a kockázat és a likviditás miatt számoltunk 15%-kal

2 A kamatszámítás alapjai

2.1 Kamatos kamatszámítás

2.1.1 Tőkésítés évente egy alkalommal

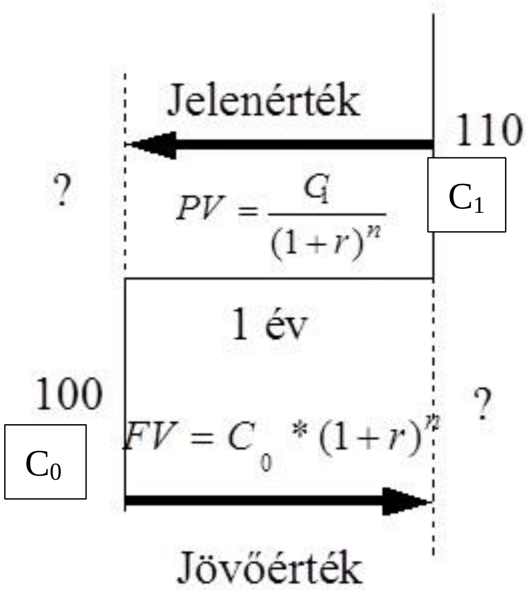
Az eddigiekben egy jövőben esedékes pénzösszeg jelenértékét határoztuk meg, de ennek fordítottja sem jelent problémát, amikor a jelenben rendelkezésre álló pénzösszeg **jövőbeli értékét (*Future Value* -** *FV)* szeretnénk meghatározni.

Egy pénzösszeg jövőértéke megmutatja, hogy ha az adott futamidő alatt a pénzt az elvárt hozammal fektetjük be, mennyi pénzünk lenne a futamidő végén.

$$FV = C_0 * (1 + r)^n$$

Ahol r az adott időszak alatt érvényes elvárt hozam,
FV_n – a pénzeszköz n időszak múlva esedékes jövőértéke,
C_0 – a jelenbeli pénzösszeg.

A jelen és jövőértékszámítást a következő ábra foglalja össze:



Ahol PV – a jövőben esedékes pénzösszeg (C_1) jelenértéke (Present Value),
FV – a jelenben esedékes pénzösszeg (C_0) jövőértéke (Future Value),
n – időtartam években.
A PV és az FV mindig számított összeg.

A fenti összefüggés ($FV = C_0 * (1 + r)^n$) a **kamatos kamatszámítás** formulája.

Feltételezzük, hogy az egyes kamatperiódusokban keletkező kamatokat újból és újból tőkésítik, vagyis pl. 2 időszak esetén a 2. kamatperiódus kamatösszegének meghatározásához az első időszakban keletkezett kamat és a tőkeösszeg együttesen adja az alapot:

$$FV = c_0 * (1 + r)^2 = c_0 * (1 + r) * (1 + r)$$

E képlet alkalmazásához a következő **feltételek** teljesülése kell:
- az adott időszak (kamatperiódus) során termelődő kamatot az időszak végén jóváírják és hozzáadják a tőkéhez
- a futamidő (n) a kamatperiódus egész számú többszöröse.

Az 1. példa megoldása FV számítással

Ennél a megoldásnál azt vizsgáljuk meg, hogy ha 15%-os kamatlábbal betétet helyeznénk el, akkor milyen pénzösszeghez jutnánk.

$$FV = 500\,000 * (1 + 0{,}15)^1 = 575\,000\ Ft$$

Mivel az így kapott pénzösszeg elmarad a barátunk 600 000 Ft-os ajánlatától, ezért inkább neki adunk kölcsön.

Láthatjuk, hogy mindkét módszer szerint ugyanarra a következtetésre jutunk, a befektetést érdemes végrehajtani.

Különböző időpontban esedékes pénzáramok összehasonlításához szükséges közös nevező a Jövő érték is lehet.

A két módszer szerint kapott végeredmény viszont különbözik. A különbség magyarázata az, hogy különböző időpontra számoltuk ki a befektetett összeg és a visszakapott pénzösszeg különbségét.

Azt hogy melyik időpontra érdemes számolni általában attól függ, hogy mi melyik időpontban vagyunk. Ha befektetési alternatívákat értékelünk, akkor a befektetés időpontja a jelen időpont és akkor érdemes jelenérték-számításokat végeznünk. Ha befektetést utólagosan értékelünk, akkor a hozamok realizálása lesz a jelenidőpont. Ekkor jövőérték-számítás szerencsésebb. Ha egy hosszabb befektetés közepén vagyunk, akkor a múltbeli pénzek jövőértékét, a jövőbeli pénzek jelenértékét számoljuk ki.

2. **példa**

Ma kölcsönadok egy évfolyamtársamnak 120 000 Ft-ot, aki azt ígéri, hogy 3 év múlva, amikor levizsgázik Pénzügytanból 160 000 Ft-ot ad majd nekem vissza. Hány százalékos éves kamatnak felel ez meg?

Megoldás

Az egyszerű kamatos kamatszámítás képletét átalakítva jutunk a hozam számításának képletéhez:

$$r = \sqrt[n]{\frac{FV}{c_0}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{160\,000}{120\,000}} - 1 = 10{,}06\%$$

A jelenlegi betéti hozamok mellett, ez kedvező lehetőségnek tűnik.

3. példa

Almás András egy őszibarackost szeretne megvásárolni. A gyümölcsöskert eladási ára 15 MFt. Pillanatnyilag csak 12 MFt-tal rendelkezik, ezért úgy döntött, hogy a hiányzó összeget kamatok formájában teremti elő. A Gazdász Bank által alkalmazott betéti kamatláb évi 4%. A kamatokat évente tőkésítik. A piaci hozamszint hosszú távon nem változik. Számítsa ki, hogy hány évig kell várnia Andrásnak, hogy az elképzelése valóra váljon!

Megoldás

A kamatos kamatszámítás képletének átrendezésével jutunk az alábbi képlethez:

$$n = \frac{ln\frac{FV}{C_0}}{ln(1+r)} = \frac{ln\frac{15\,000\,000}{12\,000\,000}}{ln(1+0{,}04)} = 5{,}69\ \text{évet kell várnia}$$

(10-es alapú logaritmusszámítás is alkalmazható, az eredmény ugyan ez lesz!)

2.1.2 Tőkésítés évente több alkalommal

Ha a kamatfizetési periódus és egész számú többszörösei megegyeznek a betét lejáratával és a kamat hozzáadódik a tőkéhez, akkor a kamatos kamatszámítás módosított képletével lehet számolni.

$$FV = C_0 * (1 + \frac{r}{m})^{n*m}$$

Ahol FV - a betét felvételekor kapott összeg,
C_0 - a betét összege,
r - az éves kamatláb,
n - a futamidő években kifejezve,
m - egy évben a kamatelszámolások száma.

A kamatlábat csak akkor kell osztani „m"-mel, ha a kamatfizetési periódus rövidebb, mint egy év. Mivel a kamatlábat éves szinten adják meg, egy kamatfizetési periódusban csak r/m kamatot írnak jóvá.

4. példa

Mekkora összeget vehetünk fel 1 év múlva, ha elhelyezünk 100 ezer forintot 10%-os kamatláb mellett egy olyan bankbetétbe,

a, ahol a kamatokat negyedévente számolják el és hozzáadják a tőkéhez (tőkésítik)? (folyamatos lekötésű bankbetét) Tételezzük fel, hogy a kamatláb a futamidő alatt nem változik!

Megoldás

$$FV = C_0 * \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n*m} = 100\,000 * \left(1 + \frac{0{,}1}{4}\right)^{1*4} = 110\,381\ Ft$$

Látható, hogy a gyakoribb kamatelszámolás miatt az éves hozam nem 10%, hanem több (110 381 / 100 000 - 1 = 10,38%). Az elérhető hozamot tehát nemcsak a kamat nagysága, hanem a fizetési gyakoriság is befolyásolja.

$$Hozam = \frac{FV}{C_0} - 1$$

Az éves 10%-os hozam tehát nem ugyanaz, mint a negyedévi 2,5%-os hozam. Éves szinten a tényleges kamatlábát a következő képlet segítségével kapjuk:

$$r_{eff} = (1 + \frac{r}{m})^m - 1 = \left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^4 - 1 = 10,38\%$$

Ahol r_{eff} - a tényleges kamatláb,
r - az éves névleges kamatláb,
m - a kamatfizetés gyakorisága 1 év alatt.

Az effektív (tényleges) hozam megmutatja, hogy az adott éves hozam időarányos részét meghatározott gyakorisággal elszámolva, hány %-al nő egy év alatt a befektetett összeg.

Minél gyakrabban fizetnek kamatot, annál nagyobb az éves szinten számolt hozam, ha minden más feltétel változatlan marad.

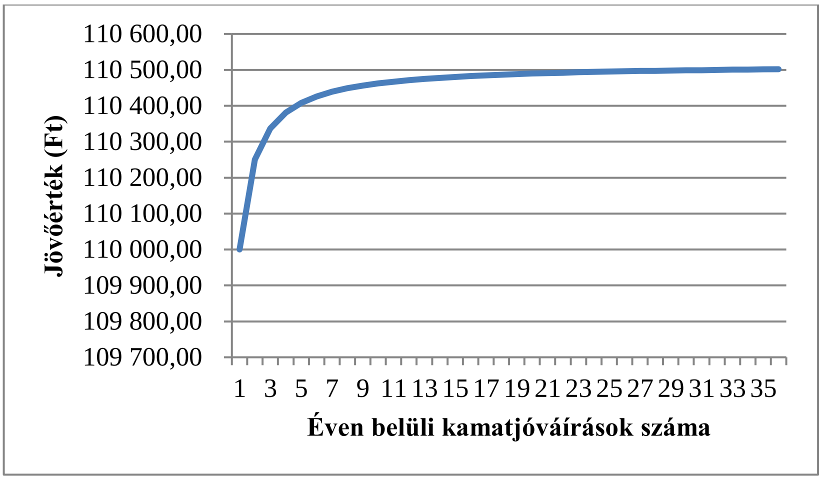
b, Oldjuk meg ezt a példát most úgy, hogy a kamatot évente, félévente, negyedévente, és havi gyakorisággal számolják el!

Megoldás

A számítások végeredményét a következő táblázat mutatja

Gyakoriság (m)	Képlet	Év végi érték (FV) ezer forintban	Hozam (FV/C_0-1) %-ban
1	$FV = 100 \times \left(1 + \frac{0,1}{1}\right)^1$	110,00	10,00
2	$FV = 100 \times \left(1 + \frac{0,1}{2}\right)^2$	110,25	10,25
4	$FV = 100 \times \left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^4$	110,38	10,38
12	$FV = 100 \times \left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^{12}$	110,47	10,47

A táblázatból látható, hogy a realizált hozam növekszik a kamatfizetési gyakoriság növekedésével, de a növekedés degresszív.



Van-e a növekedésnek határértéke? A válasz igen, és a természetes szám (e≈2,72) segítségével a probléma megoldható. Ha pontosan egy évnyi hozamot vizsgálunk, akkor:

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} = e^{r}$$

Az e^r-t kamaterőnek is nevezik.

A kamaterő megmutatja, hogyha végtelen gyakorisággal számoltuk volna el az adott éves r hozam időarányos részét, pénzünk 1 év alatt hányszorosára növekedett volna.

A kamaterőt felhasználva a jövőérték számítás egy másik típusához, a folytonos kamatszámításhoz jutunk.

Folytonos kamatszámítás esetében a kamatperiódus hossza elhanyagolhatóvá válik, vagyis az éven belüli kamatjóváírások száma a végtelenhez tart.

$$FV = C_0 * e^{r*n}$$

c, Milyen összeget vehetnénk fel az év végén, ha végtelen gyakorisággal számolnák el a kamatokat?

Megoldás

Behelyettesítve az előző képletbe a példánk adatait, kapjuk:

$$FV = C_0 * e^{r*n} = 100\,000 * e^{0,1*1} = 110\,517{,}09$$

Azaz, a hozam 10,52%, ami nem áll messze a havi kamatfizetési gyakoriság mellett kapott 10,47%-os hozamtól. Ezért alacsony kamatlábak mellett alkalmazható az a hüvelykujj-szabály, hogy havi gyakoriság fölött a kamaterő képletét alkalmazzák a tényleges éves hozam meghatározásához.

5. példa

Tételezzük fel, hogy 300 000 Ft-unkat elhelyezzük betétben 3 éves időtartamra. A pénzintézet által ígért éves névleges kamatláb 5%.

Lejáratkor milyen összeget vehetünk fel és az hány százalékos tényleges éves kamatnak felel meg, ha a kamatok

a) minden év utolsó napján tőkésítik,

b) *minden hónap utolsó napján tőkésítik?*
c) *Mennyi az elméletileg elérhető maximális hozam?*

Megoldás

a) *minden év utolsó napján tőkésítik:*

$$FV = C_0 * (1+r)^n = 300\,000 * (1+0{,}05)^3 = 347\,287{,}5\ Ft$$

b) *minden hónap utolsó napján tőkésítik:*

$$FV = C_0 * \left(1+\frac{r}{m}\right)^{n*m} = 300\,000 * \left(1+\frac{0{,}05}{12}\right)^{3*12} = 348\,441{,}67\ Ft$$

$$r_{eff} = (1+\frac{r}{m})^m - 1 = \left(1+\frac{0{,}04}{12}\right)^{12} - 1 = 5{,}116\%$$

c) *Mennyi az elméletileg elérhető maximális hozam?*

$$FV = C_0 * e^{r*n} = 300\,000 * e^{0{,}05*3} = 348\,550{,}27$$
$$r_{eff} = e^r - 1 = e^{0{,}05} - 1 = 5{,}127\%$$

2.2 A kamatokat nem tőkésítjük- Egyszerű kamatszámítás

Ha elvetjük azt a feltételezést, miszerint a tőkére jutó kamat hozzáadódik az időszak végén a tőkéhez és későbbiekben a kamattal megnövelt összegre esedékes a kamat, az egyszerű kamatszámítás képletét kell alkalmaznunk. Ekkor az adott időszakra jutó kamatot egyszerű arányosítással kapjuk meg. Az egyszerű kamatszámítás képletei jelen- és jövőérték-számítás esetén:

$$FV = C_0 * (1 + n * r)$$
$$PV = C_n * (\frac{1}{1 + n * r})$$

Ahol FV - jövőérték,
PV - jelenérték,
n - időtartam hossza években, n<1 év,
r - elvárt hozam,
C_0 – jelenbeli pénz nagysága,
C_n – jövőbeli pénz nagysága.

Az egyszerű kamatszámítást akkor alkalmazzuk, ha a befektetés időtávja kisebb, vagy egyenlő a kamatperiódussal. Ha hosszabb, a kamatos kamatszámítást vagy az egyszerű és a kamatos kamatszámítás kombinációját - amit vegyes kamatszámításnak nevezünk - használják.

A befektetés futamideje alatt képződött hozamok esetében feltételezzük, hogy azokat az elvárt hozammal („ r ”) fektetik be újra. A feltételezés gazdasági magyarázata az, hogy az elköltött kamat határhaszna megegyezik azzal a többlet-pénzmennyiséggel, amit az újrabefektetés során nyertünk volna. Így számításaink során mindig kamatos vagy vegyes kamatszámítást alkalmazunk, ha a befektetés időtávja meghaladja a kamatfizetés gyakoriságát.

6. példa

Egy vállalat kéthetes futamidőre 1 millió forintot helyezett el július 22-én egy bankbetétbe. A betét kamatlába évi 4%, kamatfizetés csak a lejárat napján. Mekkora összeget vehet fel a vállalat két hét múlva?

Megoldás

A kamatot időarányosítással kell kiszámítani. Sajnos az arányosítás módszere nem egyértelmű. Az egyes arányosítási módszerek abban különböznek egymástól, hogy hány naposnak tekintik az évet és a hónapokat. A gyakorlati életben három arányosítási módszer terjedt el, amelyek egy-egy nemzetről kapták a nevüket. Az egyes módszerek jellemzőit a következő mutatja.

Az egyszerű kamatszámítás esetében alkalmazható arányosításfajták

Arányosítás neve	Hónapok napjainak száma	Évek napjainak száma
Német	30	360
Francia	naptári	360
Angol	naptári	365
Tényleges	*naptári*	*365/366*

A német kamatszámítás akkor volt még használatos, amikor még kézzel és nem számítógéppel számolták a kamatokat. A német módszerrel könnyebb volt meghatározni a futamidő nagyságát és a 360-nal való osztás gyakrabban adott egész számot.

A francia módszer a fenti megfontolásokból tartotta meg a 360-as számot, bár a hónapokat már naptári hosszuk szerint méri. Így nem fordulhat elő, hogy egy februári lekötésnek ugyanakkora legyen a kamata, mint egy márciusinak, holott a március általában 3 nappal hosszabb. A francia számítás azonban azzal, hogy megtartja a 360-as osztót, gyakorlatilag több kamat felszámítását eredményezi, mint a valós érték, mivel az arányosítás nevezője kisebb, mint a tényleges naptári napok száma az évben.

Az angol módszer manapság a leggyakoribb kamatszámítási forma. Szökőévekben február 29-én kamatszünnapot tartanak. A módszer előnye a könnyebb programozhatóságában van a tényleges kamatfizetéssel szemben.

A fentihez hasonló kamatszámításokhoz ismerni kell, hogy melyik naptári hónap hány napból áll:

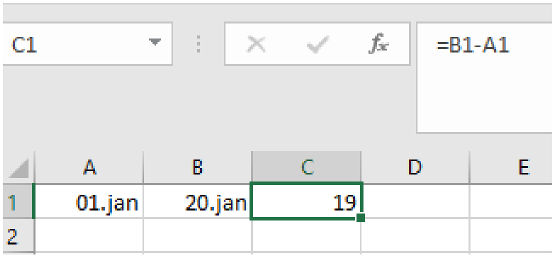
Jan.	Febr.	Márc.	Ápr.	Máj.	Jún.	Júl.	Aug.	Szept.	Okt.	Nov.	Dec.
31	28/29[2]	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31

Továbbá tudni kell, hogy a betéteknél a gyakorlatban általában a betétlekötés napja beleszámít a kamatszámítás során a napok számába, míg az a nap, amikor felvesszük a pénzt, már nem

[2] Szökőévben a február 29 napos a „szokásos” 28 nappal szemben.

(valójában a banki gyakorlatban nem a napok, hanem azoknak az éjszakáknak a száma számít, ameddig a pénzünk a banknál volt elhelyezve). Ez a számítási mód így némileg eltér a matematikai kamatszámítástól. Hogy még érthetőbb legyen: ha egy ügyfél egy adott hónap elsején elhelyezi a pénzét a bankban és másnap felveszi azt, akkor a bank csak egy „napra” fizet kamatot, mert csak egy éjszakát volt nála a pénz. Arra a napra, amikor felvettük a pénzt, már nem ad kamatot. Ha két hétre, vagyis 14 napra szeretnénk kamatot kapni a banktól, akkor a betételhelyezés napjától számítva a 15. napon vehetjük csak fel a pénzünket.

Tipp! Az Excel jól használható a kamatszámításhoz figyelembe veendő napok számának a meghatározására. Írjuk be a két dátumot egy-egy cellába, majd egy harmadik cellába írjuk be azt a képletet, hogy a későbbi időpontot tartalmazó dátum cellahivatkozásából kivonjuk a korábbi időpontra mutató dátum hivatkozását. Így az Excel megadja a két beírt dátum között eltelt napok számát. (Pld: A1 cellába írjuk be, hogy 2018.01.01; B1 cellába írjuk be, hogy 2018.01.20; míg C1 cellába írjuk be, hogy =B1-A1. A C1 értéke 19 lesz, vagyis a két időpont között eltelt (tényleges) napok száma 19.



Visszatérve az előző példához, azt mind a négyfajta módszer szerint kiszámoljuk.

Ha a betétet két hétre helyezték el és mivel július 31 napos, a betétet augusztus 5-én veszik fel. (31-22+1+4=14 nap, azaz 2 hét)

Német kamatszámítás szerint a lekötési idő 13 nap, mivel minden hónap 30 napos: 30-22+1+4=13. Így n értéke 13/360≈0,036

Behelyettesítve a képletbe:

$$FV = 1\,000\,000 \times \left(1 + \frac{13}{360} \times 0{,}04\right) = 1\,001\,444$$

Két hét múlva a bank a német kamatszámítási módszer szerint 1 001 444 Ft-ot fizet vissza.

A francia kamatszámítás szerint a lekötési idő a tényleges 14 nap, mivel a francia módszer a tényleges naptári napokkal számol, de osztani továbbra is csak 360-al osztunk.

$$FV = 1\,000\,000 \times \left(1 + \frac{14}{360} \times 0{,}04\right) = 1\,001\,556$$

A francia módszer alkalmazása 112 Ft-al több kamat kifizetését eredményezte a német módszerhez képest.

Az angol módszer csak abban különbözik a franciától, hogy 365-el osztunk a kamat kiszámításakor:

$$FV = 1\,000\,000 \times \left(1 + \frac{14}{365} \times 0{,}04\right) = 1\,001\,534$$

A francia módszer 22 Ft-al több kamat kifizetését eredményezte, mint az angol.

Az angol kamatszámítás végeredménye jelen esetben megegyezik a tényleges kamatarányosítás eredményével.

Az egyszerű kamatszámítás egy alesete, amikor a kamatlábat nem a jelenértékre (PV) vonatkoztatják, hanem a jövőérték (FV) meghatározott %-ban fejezik ki. Ekkor előleges kamatszámításról beszélünk, amelyről az értékpapíroknál lesz szó.

7. példa

Tárgyév március 8-án 100 000 Ft-ot helyezünk el évi 4%-os betéti kamatra. Mennyi pénzt vehetünk fel május 22-én, ha kamatfizetés csak a lejárat napján van?

Megoldás

Egyszerű kamatszámításról van szó, az egyetlen érdekesség a futamidő hossza, ezért a feladatot mind a három módszer segítségével kiszámoljuk

$$FV_{német\ m.szerint} = 100\,000 * \left(1 + 0{,}04 * \frac{(30 - 8 + 1) + 30 + 21}{360}\right) = 100\,822{,}22\ Ft$$

$$FV_{francia\ \ m.szerint} = 100\,000 * \left(1 + 0{,}04 * \frac{(31 - 8 + 1) + 30 + 21}{360}\right) = 100\,833{,}33\ Ft$$

$$FV_{angol\ m.szerint} = 100\,000 * \left(1 + 0{,}04 * \frac{(31 - 8 + 1) + 30 + 21}{365}\right) = \ \ 100\,821{,}92\ Ft$$

8. példa

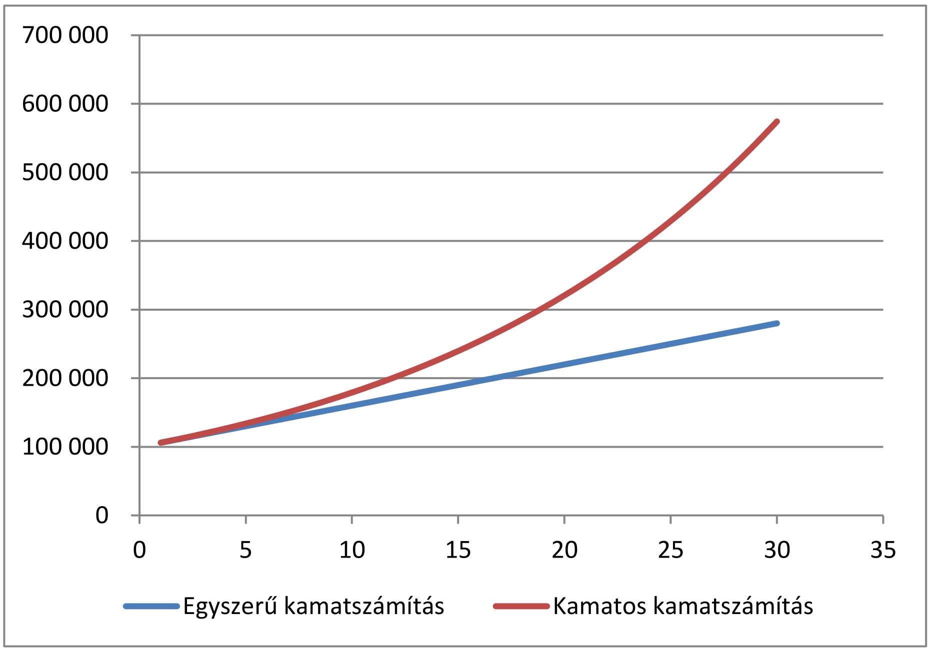
Vizsgáljuk meg hogyan alakul 100 000 jövőértéke egyszerű és kamatos kamat számítással, ha 6%-os éves hozammal fektetem be a pénzemet

a, 1…10 és 30 évre

b, 1,3,6,9,12 hónapra

Megoldás

Kamatozási időtartam	100.000 Ft befektetés jövőértéke 6%-os éves kamatláb mellett	
Év	Egyszerű kamatszámítás	Kamatos kamatszámítás
1	106 000	106 000
2	112 000	112 360
3	118 000	119 102
4	124 000	126 248
5	130 000	133 823
6	136 000	141 852
7	142 000	150 363
8	148 000	159 385
9	154 000	168 948
10	160 000	179 085
30	280 000	574 349

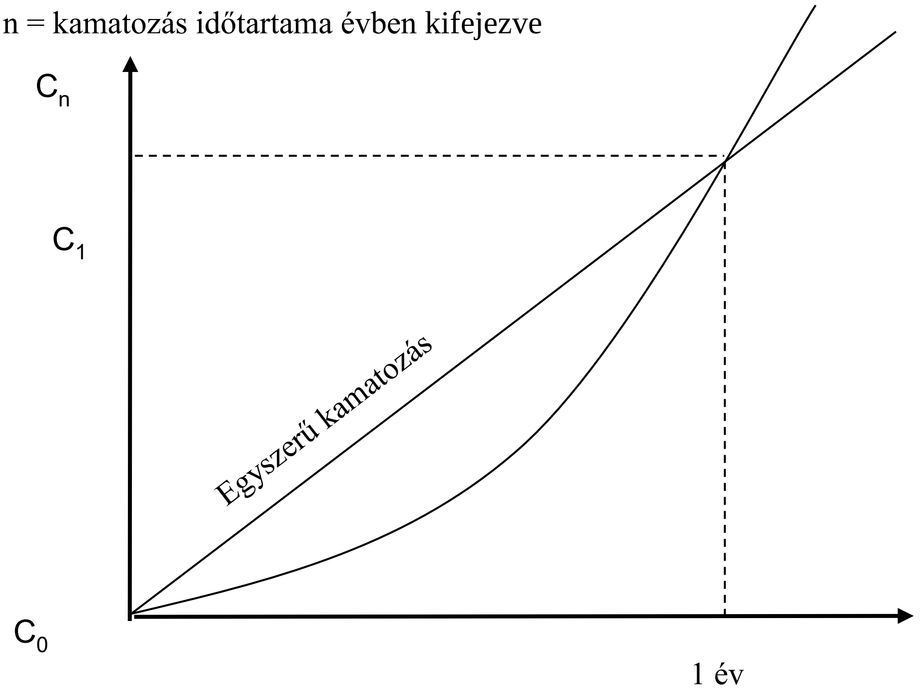


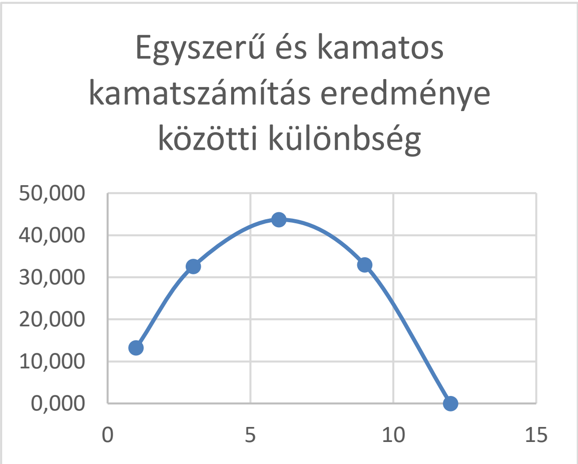
A kamatos kamatszámítás magasabb betétértékeket ad, mint az egyszerű kamatszámítás, ha a lekötési időszak hosszabb a kamatozási periódusnál.

Kamatozási időtartam	100.000 Ft befektetés jövőértéke 6%-os éves kamatláb mellett		
Hónap	Egyszerű kamatszámítás	Kamatos kamatszámítás*	Eltérés
1	100 500	100 487	13,2
3	101 500	101 467	32,6
6	103 000	102 956	43,7
9	104 500	104 467	32,9
12	106 000	106 000	0,0

$$*FV = C_0 \times (1 + r)^n$$

Ahol:
n = kamatozás időtartama évben kifejezve





A kamatos kamatszámítás alacsonyabb betétértékeket ad, mint az egyszerű kamatszámítás, ha a lekötési időszak rövidebb a kamatozási periódusnál.

2.3 Vegyes kamatszámítás

A lekötési idő nem feltétlenül egész számú többszöröse a kamatperiódusnak. Továbbá lehetséges, hogy a lekötés időpontjától függetlenül a kamatfizetés időpontja bizonyos dátumokhoz van kötve (ez a helyzet a látra szóló betétek esetében). Ebben az esetben a vegyes kamatszámítás képletét kell alkalmazni, ami kombinálja az egyszerű és a kamatos kamatszámítás képleteit. A kamatfizetési periódusok szempontjából tört időszakban az egyszerű, míg az egész időszakokban a kamatos kamatszámítás képleteit alkalmazzuk, és a tagokat összeszorozzuk egymással.

A vegyes kamatszámítás általános képlete a következő:

$$FV = C_0 * (1 + r * n_1) * \left(1 + \frac{r}{m}\right)^N * (1 + r * n_2)$$

Ahol FV - a betét felmondásakor kifizetett összeg,
C_0 - a betét összege,
r - az éves kamatláb,
N - a betét futamideje alatt a teljes kamatperiódusok száma,
m - egy évben a kamatelszámolások száma,
n_1 - a betét elhelyezésétől az első kamatelszámolásig eltelt idő évben,
n_2 - az utolsó kamatelszámolástól a betét felmondásáig eltelt idő évben.

9. példa

Tételezzük fel, hogy április 10.-én egy 100 ezer forintos betétet helyezünk el egy olyan számlára, amelyre <u>minden hónap utolsó napjának végén</u> fizetik ki a kamatot. Mekkora összeget vehetünk fel szeptember 18-án a számláról, ha 4%-os névleges betéti kamatot ígértek? Használjuk a német kamatszámítási módszert!

Megoldás

A német kamatszámítás esetében az év napjainak száma 360 és minden hónap 30 napos. Áprilistól szeptemberig 4 egész hónapig volt lekötve a pénz (május, június, július, augusztus, azaz N=4), április 10-től, április 30-ig 21 nap (Ez azért 21 nap és nem 20, mert április 30-án nem vesszük még fel a pénzt), szeptember elsejétől szeptember 18-ig 17 nap telt el. Behelyettesítve a képletbe, kapjuk:

$$FV = C_0 * (1 + r * n_1) * \left(1 + \frac{r}{m}\right)^N * (1 + r * n_2)$$

$$FV = 100\,000 * \left(1 + 0{,}04 * \frac{21}{360}\right) * \left(1 + \frac{0{,}04}{12}\right)^4 * \left(1 + 0{,}04 * \frac{17}{360}\right) = 101\,768{,}34\ Ft$$

A vegyes kamatszámítás eredményét a kamatos kamatszámítás képletével is közelíthetjük, ha megengedjük, hogy „n" értéke ne csak természetes szám legyen. Az „n" értéke 158/360 lesz, mivel ennyi évig volt lekötve a betét.

$$FV = C_0 * (1 + r)^n = 100\,000 * (1 + 0{,}04)^{\frac{158}{360}} = 101\,736{,}25\ Ft$$

A kamatos kamatszámítás éven belüli esetben alábecsli a ténylegesen kapott kamat nagyságát.

10. példa

Tételezzük fel, hogy február 12-én 100 000 Ft összegű betétet helyezünk el egy olyan számlára, amelyen

a) *kéthavonta, minden 2. naptári hónap utolsó nap végén, a banki zárást követően*

b) *negyedévente, a naptári negyedév utolsó napjának végén, a banki zárást követően*

tőkésítik a kamatokat. Pénzünket – a kamatokkal növelt tőkeösszeget – még ugyanazon év december 23-án kívánjuk felvenni. Mekkora összeg felett rendelkezhetünk ebben az időpontban?

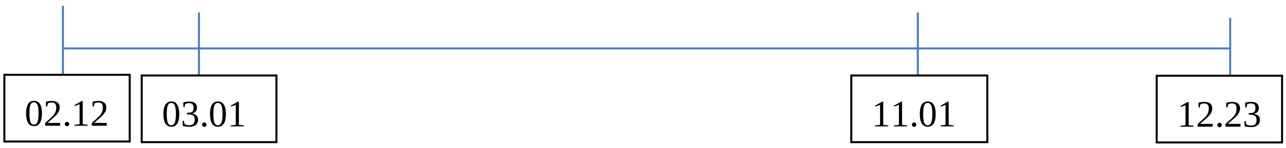
Használja a német, a francia, valamint az angol kamatarányosítási módszert mindhárom feladatrész kidolgozásához! A pénzintézet évi 4%-os névleges kamatlábat rögzített a betét feltételei között!

Megoldás:

a, Tőkésítés kéthavonta, minden 2. naptári hónap utolsó napján

m = 6

Időszakok a példában:



Az ábrán a kezdő és végpont a betét elhelyezésének és felvételének időpontját, míg a köztes pontok az új kamatszámítási időszakok kezdetét jelölik.

	n_1	N	n_2
német	19/360	4	52/360
francia	17/360	4	52/360
angol	17/365	4	52/365

<u>német:</u>

$$100\,000 * \left(1 + 0{,}04 * \frac{19}{360}\right) * \left(1 + \frac{0{,}04}{6}\right)^4 * \left(1 + 0{,}04 * \frac{52}{360}\right) = 103\,504{,}84\ Ft$$

<u>francia:</u>

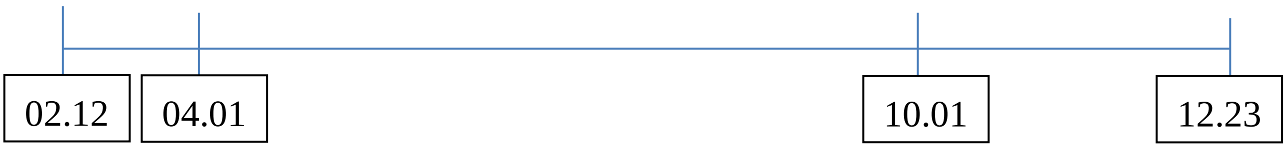
$$100\,000 * \left(1 + 0{,}04 * \frac{17}{360}\right) * \left(1 + \frac{0{,}04}{6}\right)^4 * \left(1 + 0{,}04 * \frac{52}{360}\right) = 103\,481{,}89\ Ft$$

<u>angol:</u>

$$100\,000 * \left(1 + 0{,}04 * \frac{17}{365}\right) * \left(1 + \frac{0{,}04}{6}\right)^4 * \left(1 + 0{,}04 * \frac{52}{360}\right) = 103\,471{,}07\ Ft$$

b.) A megoldás elve ugyanaz, csak az egyes időszakok hossza fog változni. A kamatok tőkésítése a negyedév utolsó napján esedékes. 1. időpont: március vége (február 12-től)

utolsó: október 1. – december 23.



	n_1	N	n_2
német	49/360	2	82/360
francia	48/360	2	83/360
angol	48/365	2	83/365

m = 4

<u>német:</u>

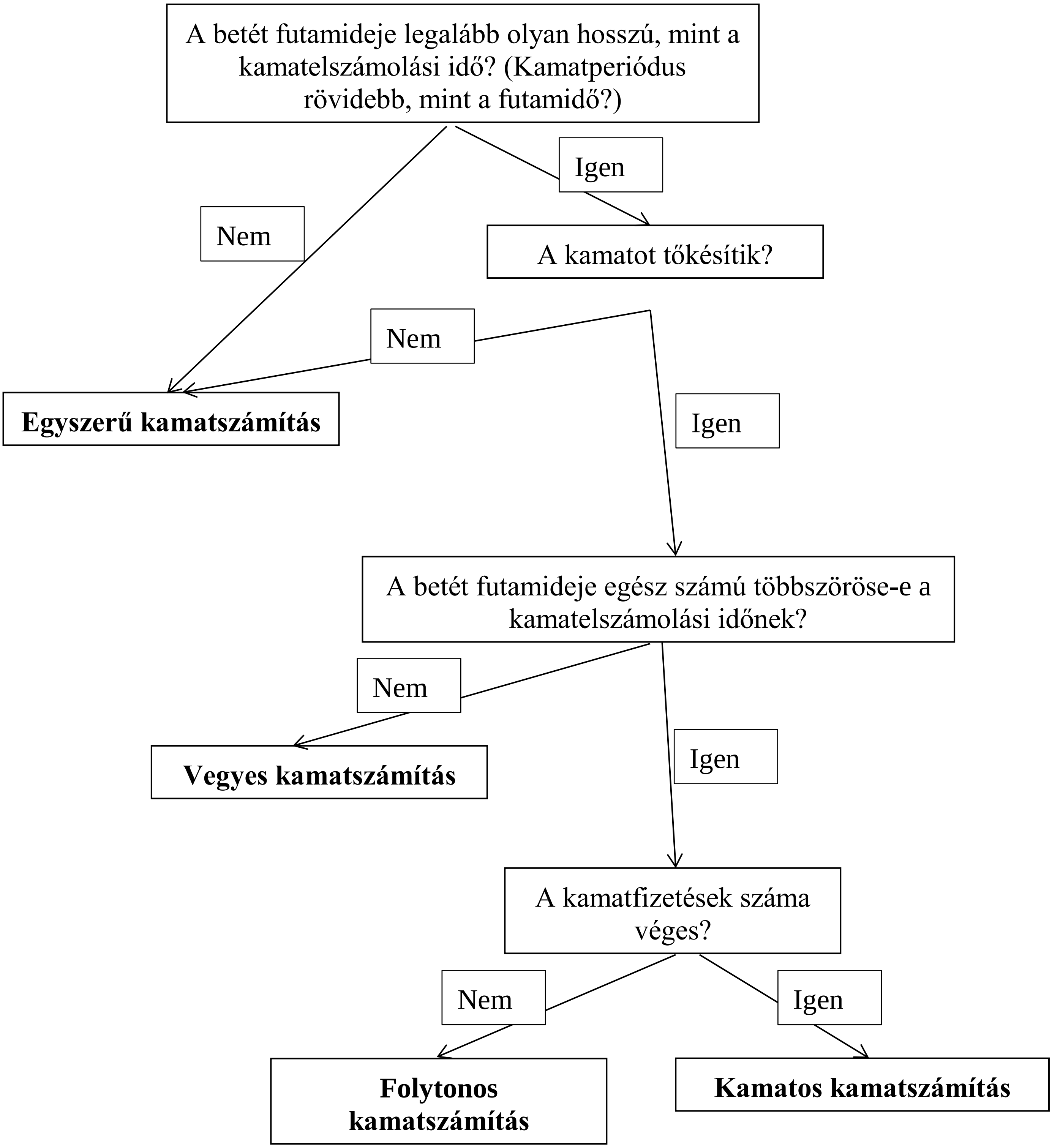
$$100\,000 * \left(1 + 0{,}04 * \frac{49}{360}\right) * \left(1 + \frac{0{,}04}{4}\right)^2 * \left(1 + 0{,}04 * \frac{82}{360}\right) = \ 103\,499{,}87\ Ft$$

<u>francia:</u>

$$100\,000 * \left(1 + 0{,}04 * \frac{48}{360}\right) * \left(1 + \frac{0{,}04}{4}\right)^2 * \left(1 + 0{,}04 * \frac{83}{360}\right) = \ 103\,499{,}83\ Ft$$

<u>angol:</u>

$$100\,000 * \left(1 + 0{,}04 * \frac{48}{365}\right) * \left(1 + \frac{0{,}04}{4}\right)^2 * \left(1 + 0{,}04 * \frac{83}{365}\right) = \ 103\,479{,}35\ Ft$$


A betét futamideje legalább olyan hosszú, mint a kamatelszámolási idő? (Kamatperiódus rövidebb, mint a futamidő?)
Igen
Nem
A kamatot tőkésítik?
Nem
Egyszerű kamatszámítás
Igen
A betét futamideje egész számú többszöröse-e a kamatelszámolási időnek?
Nem
Vegyes kamatszámítás
Igen
A kamatfizetések száma véges?
Nem
Igen
Folytonos kamatszámítás
Kamatos kamatszámítás

2.4 A kamatszámítás további esetei (Változó kamatláb, Reálkamatláb, EBKM, tranzakciós költségek)

11. példa

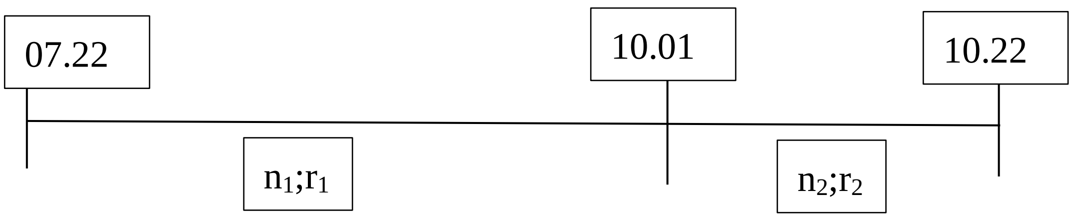
Takarékos Tihamér 530 000 Ft megtakarítással rendelkezik. Spórolt pénzét 3 hónapos lejáratú, változó kamatozású betétkönyvben helyezte el a Spekulatív Bankban. A tőkelekötés időpontja július 22. Az ügyfél legkorábban október 22-én juthat a pénzéhez. Esedékesség előtti felmondás esetén a hitelintézet kamatot nem fizet. Az év elején érvényes betéti kamatláb 6%, amely év végéig negyedévente, a banki zárást követően 0,25 százalékponttal csökken. A KSH által közétett inflációs ráta havi 0,1%. Használjuk az angol kamatarányosítás módszerét!

Feladat:

a) *Számítsa ki Takarékos Tihamért október 22-én megillető összeget!*
b) *Számítsa ki, hogy a Takarékos úr által kapott kamat hány %-os átlagos éves hozamnak felel meg!*
c) *Számítsa ki a reálkamatot és az éves szintre vetített reálhozamot!*

Megoldás:

a)



kamat: július 22. – szeptember 30.: 5,5% → 10+31+30=71 nap (szept. 30-is még 5,5%-on kamatozott)

október 1. – október 22.: 5,25% = 21 nap (okt. 21-e az utolsó kamatozó nap)

$$FV = C_0 * (1 + r_1 * n_1 + r_2 * n_2)$$

$$FV = 530\ 000 * \left(1 + 0{,}055 * \frac{71}{365} + 0{,}0525 * \frac{21}{365}\right) = 537\ 271{,}16\ Ft$$

b) Éves átlagos hozam

Az egyszerű kamatszámítás képletének átrendezéséből kapjuk meg az éves átlagos hozam számítását:

$$FV = C_0 * (1 + n * r)$$

$$r = \left(\frac{FV}{C_0} - 1\right) * \frac{1}{n}$$

$$r = \left(\frac{537\ 271{,}16}{530\ 000} - 1\right) * \frac{365}{92} * 100 = 5{,}44\%$$

c) reálkamat, éves reálhozam

A reálkamatláb megmutatja, hogy átlagosan hány %-kal több (vagy kevesebb) árut tudunk megvásárolni a pénzünkért a befektetési időszak végén, mint tudtunk az elején.

A reálkamatláb kiszámításának képlete:

$$r_r = \left(\frac{1 + r_n}{1 + i}\right) - 1$$

Ahol r_r = reálkamatláb,
r_n = nominális kamatláb,
i = infláció.

Éves reálhozam = $r_r = \left(\frac{1+r_n}{1+i}\right) - 1 = \left(\frac{1+0{,}0544}{(1+0{,}001)^{12}}\right) - 1 = 4{,}18\%$

A feladat „a” részében meghatároztuk, hogy Tihamér 3 hónap után 7 372,15 Ft hozammal fog rendelkezni.
De vajon mennyivel több árut, vagy szolgáltatást tud vásárolni érte?

$$reálkamat\ \text{összege} = \frac{nominális\ kamatösszeg}{1+inflációs\ ráta} = \frac{7\ 271{,}16}{(1+0{,}001)^3} = 7\ 249{,}39\ Ft,$$

vagyis ennyivel több árut és szolgáltatást tud vásárolni.

A példa „b” részében megkapott eredmény (5,44%) a feladat EBKM mutatóját jelenti.

Betétek esetében a megtakarítási ajánlatok összehasonlítását Egységesített Betéti Kamatlábmutató (EBKM) alapján tehetjük meg. Ez megmutatja a betét – a kamatadón kívüli – ténylegesen kifizetendő éves kamatát.

A betétekre nem csak kamat jár, hanem a kezeléséért a bank különböző díjakat, jutalékokat is felszámíthat. Mivel ezek csökkentik a betét hozamát, a tényleges hozam tehát kisebb lehet, mint a bank által ígért kamat. Az EBKM ezeket a levonásokat is tartalmazza. Ebből tudjuk meg egy-egy betét nettó hozamát, és összehasonlíthatjuk egymással a bankok kamatígéreteit.

Az EBKM

- 365 napra számítja ki az éves névleges kamatlábat,
- éven belül lineáris kamatszámítást alkalmaz,
- éven túl pedig kamatos kamatszámítást
- az elszámolt kamatot korrigálja a fizetendő díjakkal, jutalékokkal

Az EBKM kiszámításához a kormányrendelet melléklete szerint a következő képletet kell alkalmazni,

- ha a lejáratig hátralévő futamidő 365 napnál kevesebb:

$$Elhelyezett\ betét = \sum_{i=1}^{n} \frac{(k+bv)_i}{1 + r * (\frac{t_i}{365})}$$

ahol

n: a kamatfizetések száma

r: az EBKM értéke

t_i: a betételhelyezés napjától az i-edik kifizetésig hátralévő napok száma

$(k+bv)_i$: az i-edik kifizetéskor járó kamat és visszafizetett betét összege

- ha a lejáratig hátralévő futamidő 365 napnál több:

$$Elhelyezett\ betét = \sum_{i=1}^{n} \frac{(k+bv)_i}{(1+r)^{(\frac{t_i}{365})}}$$

12. példa

100 000Ft-ot helyezünk el 5%-os kamatláb mellett, a bankunk francia arányosítást használ. Hány százalékos az ügylet EBKM mutatója?

Megoldás

$$100\,000 = \frac{105\,000}{1 + r * \frac{360}{365}}$$

Átrendezés után

$$EBKM = (1{,}05 - 1) * \frac{365}{360} = 5{,}07\%$$

13. példa

100 000 Ft-ot helyezünk el a mai nap 1 éves 4,5%-os kamatozású akciós betétben.

a) Milyen összeg lenne a számlánkon 1 év múlva tranzakciós költségek nélkül?

b) Mennyi összeggel rendelkezhetünk a kamatadó levonása után?

c) Mennyi pénzt vehetünk fel a bankautomatából, ha a tranzakciós illeték összegét a számlánkon akarjuk hagyni, feltételezve, hogy a bank egyéb készpénzfelvételi díjat nem számít fel?

Megoldás

a, Tranzakciós költségek nélkül FV=104 500 Ft lenne a számlán

b, Kamatadó: 15% → 4 500*15%= 675 Ft

A kamatadó levonása után 103 825 Ft lesz a bankszámlánkon.

c, Tranzakciós illeték 0,6%= 103 825*0,6%= 623 Ft

Kézhez kapott összeg= 103 825-623=103 202 Ft

3 Több kifizetésből álló pénzáramok

Először olyan hozamsorozatokkal foglalkozunk, melyek meghatározott rendszerességgel követik egymást és mértani sorozatot alkotnak.

Ha a jövőbeli pénzek között eltelt idő azonos, azaz két pénzösszeg esedékessége között mindig ugyanakkora idő telik el, továbbá az egymást követő pénzösszegek mértani sort alkotnak, évjáradékról vagy annuitásról beszélünk.

Ha a hozamok végtelen hosszúak, az annuitás neve örökjáradék. Ha korlátozott ideig tartanak, akkor nevük lejáratos annuitás, vagy egyszerűen annuitás. Az annuitások esetében a hozamok lehetnek ugyanakkorák (egyszerű annuitás), vagy egy g%-kal növekedők (növekvő annuitás).

Az annuitások esetében több fogalmat is definiálnunk kell.

Két pénzáram esedékessége között eltelt időt járadékköznek nevezzük.

A pénzáramok nagyságát járadéktagnak hívjuk.

Az olyan pénzáram-sorozatokat, melyeknél a járadékköz megegyezik, ütemezett pénzáramoknak mondjuk.

A fenti fogalmak ismeretében egy rövidebb definíciót is adhatunk az évjáradékra.

Az annuitás olyan ütemezett pénzáram, ahol a járadéktagok mértani sorozatot alkotnak.

Most olyan lejáratos annuitásokkal fogunk foglalkozni, ahol a mértani sor kvóciense, q=1, azaz minden hozam ugyanakkora.

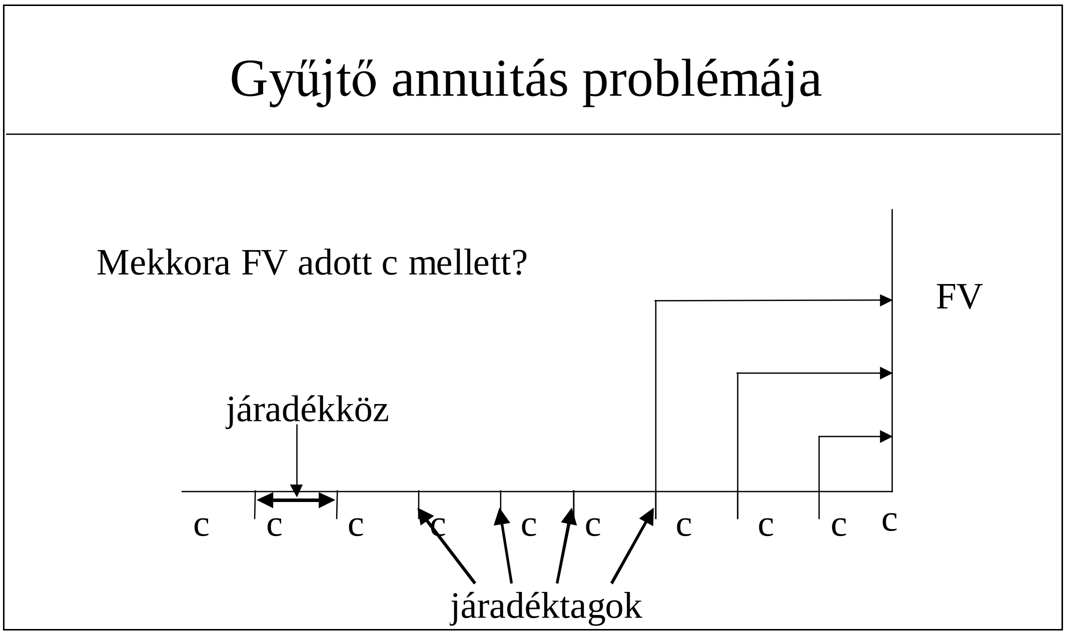
3.1 Egyszerű annuitás jövőértéke

14. Példa

Egy életbiztosító egy 10 éves megtakarítási lehetőséget kínál nekünk. Minden év elején befizetünk 10 ezer forintot, melynek reálértékét a futamidő során karbantartjuk. A biztosító ügynöke évi 4%-os reálhozammal kecsegtet minket múltbeli tapasztalatok alapján. Tételezzük fel, hogy hiszünk neki, akkor reálértékben mennyi lesz a számlánkon 10 év múlva!

A fenti példában egy annuitás jövőértékére vagyunk kíváncsiak. Ekkor gyűjtő annuitásról beszélünk.

A gyűjtő járadék esetében arra vagyunk kíváncsiak mennyi lesz az évjáradék értéke egy járadékközzel az utolsó járadéktag esedékessége után, vagy annak időpontjában.



Ahol c – járadéktag,

FV – lejáratos évjáradék jövőértéke az utolsó járadéktag esedékességének időpontjában.

Egy annuitás jövőértékének nagyságát az utolsó járadéktag esedékességének időpontjában:

$$FV = c * \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

(Mértani sorozat összegképlete segítségével: $S_n = a_1 \times \frac{q^n - 1}{q-1}$, ahol q=1+r)

Ahol c - járadéktag nagysága,

n - járadéktagok száma,

r - éves kamatláb,

$$FV = 10\,000 * \frac{(1+0{,}04)^{10} - 1}{0{,}04} = 120\,061{,}07 \text{ Ft}$$

A képlet az utolsó járadéktag esedékességének időpontjában mutatja egy annuitás jövőértékét. Ebben az esetben ez az időpont a 10. év eleje. Nekünk viszont a 10. év végi érték kellene!

Az év elején 120 ezer forintunk van. A 10. évben is feltételeztük a 4%-os reálhozamot. Egy évre ha befektetjük a 120 ezer forintunkat 4%-al, akkor a 10. év végi értéket a kamatos kamatszámítás vagy egyszerű kamatszámítás képlet segítségével számolhatjuk ki.

$$FV = C_0 * (1+r) = 120\,061{,}07 * (1+0{,}04) = 124\,863{,}51\ Ft$$

15. Példa

Egy biztosítótársaság egy 18 éves biztosításra minimum 2%-os reálhozamot garantál. A biztosított vállalja, hogy minden negyedév elején 20 ezer forintot fizet be a társaságnak, melyből a költségek levonása után 15 ezer forint növeli megtakarításait. Az infláció arányában a befizetések is növekednek. Mekkora összegre lesz jogosult a biztosított a 18. év végén, ha az éves 2%-os reálhozam időarányos részét negyedévente elszámolják?

Megoldás

Ha az éves hozam időarányos részét negyedévente elszámolják, akkor a következő képlettel számolhatunk:

$$FV = c * \frac{(1+\frac{r}{m})^{n*m} - 1}{\frac{r}{m}}$$

Ahol c - járadéktag nagysága,
n - futamidő években kifejezve,
r - éves kamatláb,
m - a befizetés évi gyakorisága

$$FV = 15\,000 * \frac{\left(1+\frac{0{,}02}{4}\right)^{18*4} - 1}{\frac{0{,}02}{4}} = 1\,296\,132{,}84\ Ft$$

A képlet az utolsó járadéktag esedékességének időpontjában mutatja egy annuitás jövőértékét. Ebben az esetben ez az időpont a 14. év harmadik negyedéve. Nekünk viszont a 15. év végi érték kellene!

$$FV = 1\,296\,132{,}84 * \left(1+\frac{0{,}02}{4}\right) = 1\,302\,613{,}5\ Ft$$

3.2 Évjáradék jövőértéke, ha kamatelszámolás csak a futamidő végén van

Ha nem történik kamatelszámolás, gyakorlatilag csak a befizetett tőkékre kell kamatot számolni, mégpedig a bankban való lekötésükkel arányosan. Ez azt jelenti, hogy az egyes törlesztőrészleteknek egyenként ki kell számolnunk a jövőértékét az egyszerű kamatszámítás képletével, majd össze kell őket adni. A képletet akkor használhatjuk, ha a pénzáram futamideje egy évnél kisebb, és a befizetésekkor kamatelszámolás nem történik, csak a betét felmondásakor.
Jelöljük „c"-vel az állandó befizetések nagyságát, „n"-nel a befizetett összegek számát, „r"-rel az éves kamatlábat, „m"-mel az évben előforduló kamatfizetési gyakoriságot!
Vegyük észre, hogy a befizetések kamatai számtani sorozatot alkotnak!
(1.53.)

$$fv = c \times \left[\left(1+\frac{n}{m}\times r\right)+\left(1+\frac{n-1}{m}\times i\right)+\ldots\left(1+\frac{1}{m}\times r\right)\right] = c\times\left[n+\frac{n\times(n+1)}{2\times m}\times r\right]$$

Ahol c - járadéktag nagysága,
n - járadéktagok száma,
m - a befizetés évi gyakorisága,
r - éves kamatláb,
fv – a nem kamatozó annuitás jövőértéke.

Kis „fv"-vel azért jelöltem a jövőértéket, hogy ezzel is kifejezzem, hogy itt a nem kamatozó annuitás jövőértékét számolom ki.

16. Példa

Minden hónap elején március 1-től tegyünk be a bankba 5 000 Ft-ot! Mekkora lesz a felnövekedett érték december 31-én zárást követően, ha kamatfizetés csak a december 31-i zárást követően van. A kamatláb legyen 4%!

Megoldás

$$fv = c * (n + \frac{n*(n+1)}{2*m} * r = 5.000 * \left(10 + \frac{10*(10+1)}{2*12} * 0{,}04\right) = 50\ 916{,}67\ Ft$$

Azaz, ha minden hónap elején befizetünk 5 000 Ft-ot, akkor a betét felmondásakor 50 916,67 Ft-ot kapunk. Ebből 50 ezer forintot tesz ki a befizetett összeg nagysága, 916,67 Ft-ot a bruttó kamat összege.

17. Példa

8 év 1 hónapon keresztül minden hónap elsején elhelyezünk egy alapba 20 000 Ft-ot, ismerve, hogy a hosszú távú kamatláb 4%. Ilyen feltételek mellett, mekkora összeghez jutunk a 8. év 1 hónapjának végén, a zárást követő kamatelszámolás után, ha a befektetett pénzünk havonta kamatozik?

Megoldás

c = 20.000 Ft

n*m = (8*12)+1=97

r = 4%

m = 12

$$FV = c * \frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n*m} - 1}{\frac{r}{m}} = 20\ 000 * \frac{\left(1+\frac{0{,}04}{12}\right)^{(12*8)+1} - 1}{\frac{0{,}04}{12}} = 2\ 285\ 898{,}62\ Ft$$

Ebben az esetben ez az időpont a (8*12)+1=97. hónap eleje. Nekünk viszont a 97. hónap végi érték kellene!

$$FV = 2\ 285\ 898{,}62 * \left(1 + \frac{0{,}04}{12}\right) = 2\ 293\ 518{,}28\ Ft$$

3.3 Annuitás jelenértéke

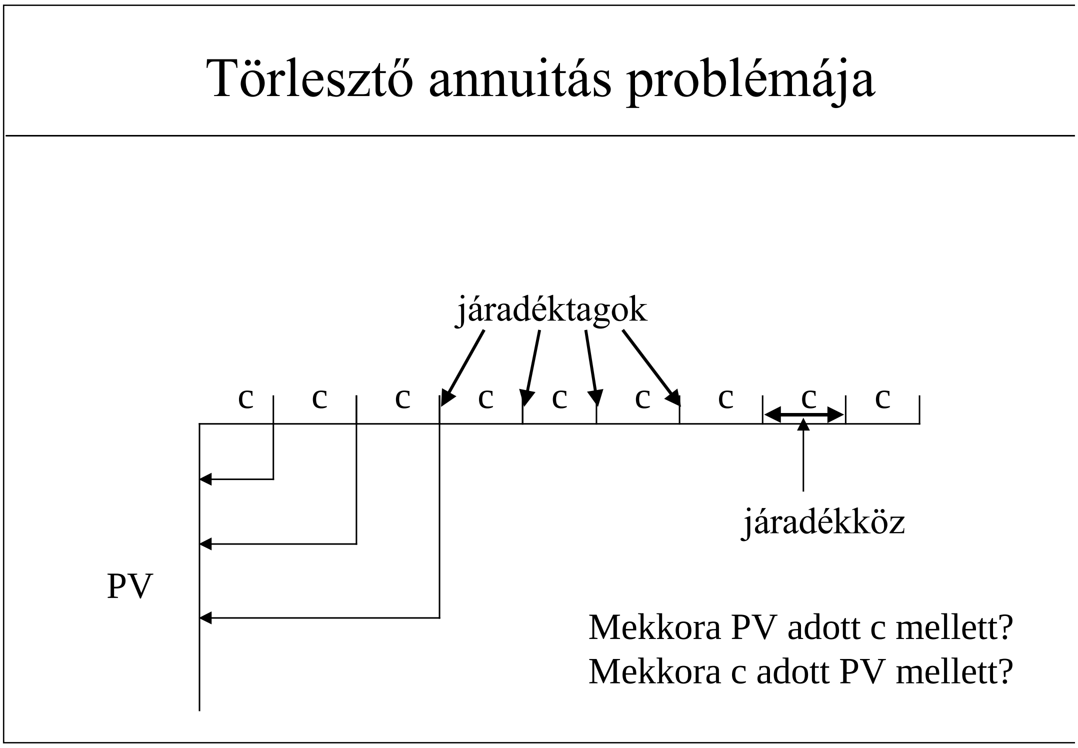
18. Példa

Egy vállalkozó ismerősünk 1 millió forintot kér tőlünk kölcsön úgy, hogy 5 éven keresztül minden év végén 300 ezer forintot ad nekünk vissza. Odaadjuk-e a pénzt, ha az ügylettől 30%-os hozamot várunk el?

Megoldás

Ki kell számítanunk, hogy az 5 darab 300 ezer forintos kifizetés jelenértéke a nagyobb, vagy az 1 millió forint. A pénzáram-sorozat egyszerű annuitást alkot, aminek most a jelenértékére vagyunk kíváncsiak.

A *szokásos törlesztő évjáradék (szokásos annuitás)* esetében arra vagyunk kíváncsiak mennyi lesz az évjáradék jelenértéke ha a járadéktagok esedékessége a járadékközök vége.



Ahol c – járadéktag,

PV – lejáratos évjáradék jelenértéke egy járadékközzel az első járadéktag esedékessége előtt.

Egy évjáradék jelenértékét egy időszakkal az első járadéktag esedékessége előtt, az alábbi képlettel számolhatjuk ki:

$$PV = c \times \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r * (1+r)^n} \right] = c \times \frac{(1+r)^n - 1}{r * (1+r)^n} = c \times AF_{r,n} \quad vagy \quad PV = c \times \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r}$$

Ahol c - járadéktag,

r - elvárt hozam,

n - futamidő években kifejezve,

PV - annuitás jelenértéke,

$AF_{r,n}$ – évjáradéktényező (annuitásfaktor) r elvárt hozam és n járadéktag esetén.

A szögletes zárójelben lévő kifejezést annuitás-faktornak vagy évjáradék-tényezőnek mondjuk.

Az annuitásfaktor (évjáradék-tényező) (AF) megmutatja, hogy „n” darab 1 Ft-ból álló annuitás jelenértéke mekkora, ha a járadékközre értelmezett kamatláb „r”.

$$PV = c \times AF_{r,n} = c \times \frac{(1+r)^n - 1}{r \times (1+r)^n} = 300 \times \frac{1{,}3^5 - 1}{0{,}3 \times 1{,}3^5} = 300 \times 2{,}436 = 730{,}7$$

Mivel az 5 darab 300 ezer forint jelenértéke kevesebb, mint 1 millió forint (730,7 eFt), ezért elutasítjuk a kölcsönigényt.

19. Példa

2 millió forint hitelt vett fel egy személy 6%-os(nominális) fix kamattal 15 éves futamidővel. A hitelt havi egyenlő részletekben (annuitás) törleszti az adós. Mekkora lesz a törlesztőrészletek nagysága, ha a hitel törlesztése

a) a hónapok végén esedékes?

b) a hónapok elején esedékes? (diszkontálás (1+r)-el, mert 1 időszakkal kevesebbet kamatozik)

Az *esedékes törlesztő évjáradéknál (esedékes annuitás)* a járadéktagok esedékessége a járadékközök eleje. Mivel a járadékközönként esedékes járadéktagok már a tárgyidőszakban kamatoznak, az *esedékes annuitás* értéke megegyezik egy hasonló feltételekkel létrejött *szokásos annuitás* jelenértékének 1/(1+r)-szeresével.

Megoldás

A példa a törlesztő annuitás alkalmazása, csak most a járadéktag a kérdés.

a, Abban az esetben, ha éven belül többször van és hó végén van törlesztés az alábbi képletet alkalmazhatjuk a törlesztő annuitásra:

$$PV = c * \frac{(1+\frac{r}{m})^{n*m} - 1}{\frac{r}{m} * \left(1+\frac{r}{m}\right)^{n*m}}, \text{ vagy } PV = c * \frac{1 - \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n*m}}}{\frac{r}{m}}$$

Ahol PV - a hitel összege,

m - a befizetés évi gyakorisága,

r - éves kamatláb,

n - a futamidő években kifejezve,

c - a járadéktag nagysága.

A képlet átrendezéséből megkapjuk a törlesztőrészletek nagyságát

$$PV = c * \frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n*m} - 1}{\frac{r}{m} * \left(1+\frac{r}{m}\right)^{n*m}} \Rightarrow c = \frac{PV}{\frac{(1+\frac{r}{m})^{n*m} - 1}{\frac{r}{m} * (1+\frac{r}{m})^{n*m}}}$$

$$c = \frac{2\,000\,000}{\frac{(1+\frac{0,06}{12})^{15*12} - 1}{\frac{0,06}{12} * (1+\frac{0,06}{12})^{15*12}}} = 16\,877{,}14\ Ft$$

b, Abban az esetben, ha éven belül többször van és hó elején van törlesztés az alábbi képletet alkalmazhatjuk a törlesztő annuitásra:

$$PV = c * \frac{(1+\frac{r}{m})^{n*m} - 1}{\frac{r}{m} * (1+\frac{r}{m})^{(n*m-1)}}, \text{ vagy } PV = c * \frac{1 - \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n*m}}}{\frac{r}{m}} * (1+r)$$

Ahol PV - a hitel összege,
m - a befizetés évi gyakorisága,
r - éves kamatláb,
n - a futamidő években kifejezve,
c – a járadéktag nagysága.

A képlet átrendezéséből megkapjuk a törlesztőrészletek nagyságát

$$PV = c * \frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n*m} - 1}{\frac{r}{m} * \left(1+\frac{r}{m}\right)^{(n*m-1)}} \Rightarrow c = \frac{PV}{\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n*m} - 1}{\frac{r}{m} * \left(1+\frac{r}{m}\right)^{(n*m-1)}}}$$

$$= \frac{2\,000\,000}{\frac{\left(1+\frac{0,06}{12}\right)^{15*12} - 1}{\frac{0,06}{12} * \left(1+\frac{0,06}{12}\right)^{(15*12-1)}}} = 16\,793{,}17 \text{ Ft}$$

---

20. Példa

Nyugdíj előtakarékosságként mekkora tőkét kell elhelyeznünk a bankban 4%-os kamatláb mellett, ha 15 éven keresztül minden évben 1 200 000 Ft életjáradékot akarunk felvenni?

Megoldás

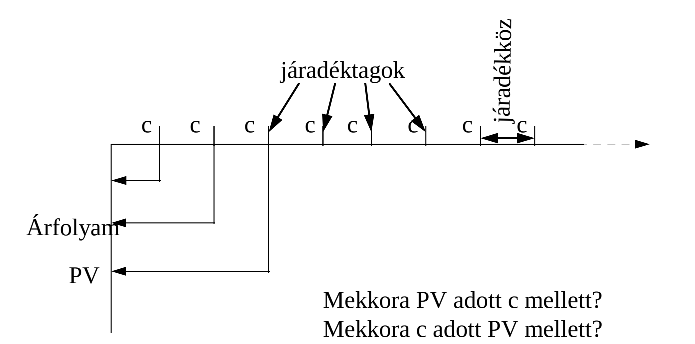
$$PV = c * \frac{(1+r)^n - 1}{r * (1+r)^n} = 1\,200\,000 * \frac{(1+0{,}04)^{15} - 1}{0{,}04 * (1+0{,}04)^{15}} = 13\,342\,064{,}92\ Ft$$

3.4 Lejárat nélküli annuitások

Azt az annuitást, melynek nincs lejárata, örökjáradéknak nevezzük.

Az egyszerű örökjáradék jellegzetessége, hogy állandó nagyságú járadéktagokból áll, de a pénzsorozatnak nincs vége. A pénzügyi életben számos példát láthatunk örökjáradékra. Ilyen a legtöbb elsőbbségi részvény pénzárama. Ezek általában fix hozamot ígérnek és lejárat nélküliek. Örökjáradéknak tekinthetők az alapítványi kifizetések is. Itt egy tőkeösszeget helyeznek el, amelynek évről évre csak a hozamait fizetik ki. Jövőértékről itt nincs értelme beszélni, hiszen az végtelen, a jelenértékét pedig úgy kapjuk, ha az évjáradék képleténél feltételezzük, hogy az "n" tart a végtelenbe. Számokkal:

Állandó tagú örökjáradék problémája



(1.70.)

$$PV = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{c}{(1+r)^1}+\frac{c}{(1+r)^2}....+\frac{c}{(1+r)^n}\right]=\frac{c}{1+r}*\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{1+r}\right)^n-1}{\frac{1}{1+r}-1}=c*\frac{1}{r}$$

Ahol c - a járadék nagysága,
r - az elvárt hozam,
n - a futamidő - itt végtelen,
PV - az örökjáradék nettó árfolyama.

Az örökjáradék nettó árfolyamát tehát megkapjuk, ha a járadékot az elvárt hozammal osztjuk.

21. Példa

Egy alapítvány 10 millió forintot helyez el egy fix 4%-kal kamatozódó számlára. Mekkora összeget oszthat ki minden év végén az alapítvány kuratóriuma, ha

a) csak a kamatokat akarják kiosztani?

b) 20 évig működik az alapítvány és állandó nagyságú összegeket akar minden évben kiosztani?

Megoldás

a, A *kifizetések örökjáradékot alkotnak*

$$PV = \frac{c}{r} \to c = PV * r$$

$$c = 10\,000\,000 * 4\% = 400\,000\ Ft$$

b, A kifizetések lejáratos annuitást alkotnak.

$$c = \frac{PV}{AF_{r,n}} = \frac{10\,000\,000}{\frac{(1+0{,}04)^{20}-1}{0{,}04*(1+0{,}04)^{20}}} = 735\,817{,}5$$

22. Példa

Vasárnap kiderült, hogy nyertem a lottón.

a, mekkora éves jövedelmet jelentenek a 2 200 000 000 Ft kamatai?

b, ha nem akarok pénzt hagyni az unokákra, mennyi pénzt költhetek el 50 év alatt évente?

(Tegyük fel, hogy 4%-ot hoz évente hosszú távon a befektetésem)

Megoldás

a, A *kifizetések örökjáradékot alkotnak*

$$PV = \frac{c}{r} \rightarrow c = PV * r$$

$$c = 2\,200\,000\,000 * 4\% = 88\,000\,000\ Ft/év$$

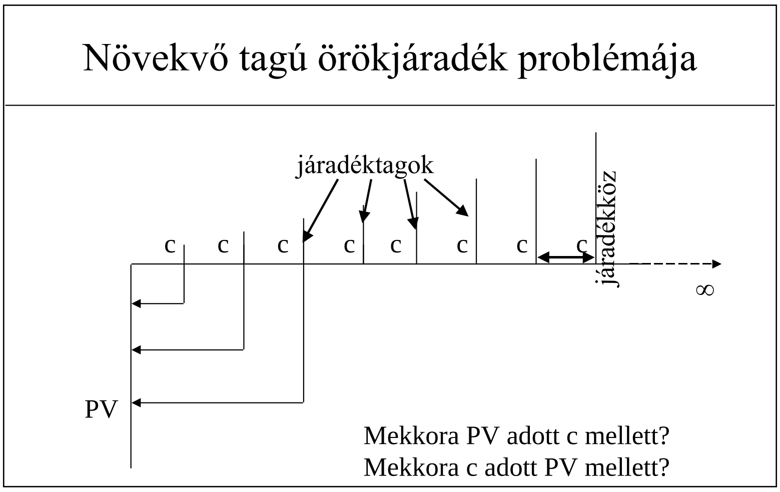
b, A kifizetések lejáratos annuitást alkotnak

$$c = \frac{PV}{AF_{r,n}} = \frac{2\,200\,000\,000}{\frac{(1+0{,}04)^{50}-1}{0{,}04*(1+0{,}04)^{50}}} = 102\,410\,440{,}99$$

$$c = 102\,410\,440{,}99\ Ft/év$$

3.5 Növekvő tagú örökjáradék

A növekvő tagú örökjáradékkal a törzsrészvények belső értékét szokták közelíteni, feltételezve, hogy az osztalékok az idő múlásával folyamatosan növekednek egy állandó százalékkal a végtelenségig.



A képlet hasonló módon vezethető le, mint az örökjáradéké:

$$PV = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{c_1}{(1+r)^1} + \frac{c_1 \times (1+g)}{(1+r)^2} .... + \frac{c_1 \times (1+g)^{n-1}}{(1+r)^n}\right] = \frac{c_1}{1+r} \times \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^n - 1}{\frac{1+g}{1+r} - 1} = c_1 \times \frac{1}{r-g}$$

Ahol c_1 - az első járadéktag nagysága,
r - az elvárt hozam,
g - a járadék növekedési rátája,
PV - a növekvő tagú örökjáradék jelenértéke.

23. példa

Tegyük fel, hogy egy alapítványt akarunk létrehozni a tankönyvírók finanszírozására. Terveink szerint minden évben 1 500 000 Ft akarunk fordítani e jótékony célra. Az alapítvány tőkéjének meghatározásakor arra is tekintettel akarunk lenni, hogy a kifizethető összeg évente (g) 2 százalékkal növekedjen. Mekkora összeget kell most elhelyeznünk, ha a hosszú távon érvényes kamatláb (r) 4százalék?

<u>Megoldás</u>

$$PV = \frac{C_1}{r-g} = \frac{1\,500\,000}{0{,}04 - 0{,}02} = 75\,000\,000\,Ft$$

3.6 Hiteltermékek összehasonlítása – THM mutató

A hitelek esetében az összehasonlítást legkönnyebben a Teljes Hiteldíjmutató (THM) alapján tehetjük meg. Ez megmutatja, hogy a tőkén felül mekkora összeg visszafizetésére kell majd számítanunk a hitel felvétele után.

A hitelért nem csak kamatot fizetünk. A kamaton felül az igénybevételért és a folyósításért a bank különböző díjakat, költségeket (pl. értékbecslés díja, kezelési költség) is felszámíthat, melyek növelik a ténylegesen visszafizetendő összeget. Fontos tudni, hogy vannak olyan költségek, melyeket a THM nem tartalmaz.

A teljes hiteldíj mutató számításánál figyelembe kell venni:

- a fogyasztó által a hitelszerződés és a lízingszerződés (a továbbiakban együtt: hitelszerződés) kapcsán fizetendő összes díjat (ideértve a kamatot, díjat, jutalékot, költséget és adót),
- a hitelhez kapcsolódó járulékos szolgáltatások költségeit, ha a hitelező vagy a lízingbe adó (a továbbiakban együtt: hitelező) számára ismertek,
- a szolgáltatás igénybevételét a hitelszerződés megkötéséhez vagy ajánlat szerinti megkötéséhez a hitelező előírja, ideértve különösen
    - a fogyasztó által felajánlott fedezet értékbecslésének díját,
    - építésnél a helyszíni szemle díját,
    - a számlavezetés és a készpénz-helyettesítő fizetési eszköz használatának költségeit és a fizetési műveletekkel kapcsolatos egyéb költségeket a meghatározott kivételekkel,
    - a hitelközvetítőnek fizetendő díjat,
    - az ingatlan-nyilvántartási eljárás díját, valamint
    - a biztosítás és garancia díját a meghatározott kivételekkel.

A THM számításánál nem vehető figyelembe:

- a prolongálás (futamidő hosszabbítás) költsége,
- a késedelmi kamat,
- egyéb olyan fizetési kötelezettség, amely a szerződésben vállalt kötelezettség nem teljesítéséből származik,
- a közjegyzői díj,
- kereskedelmi kölcsön vagy kapcsolt hitelszerződés esetén a fogyasztó által a termékek vagy szolgáltatások megvételeért fizetett - a vételáron felüli - díj függetlenül attól, hogy készpénzzel vagy hitelből fizeti, valamint
- a számlavezetés és a készpénz-helyettesítő fizetési eszköz használatának költségei és a fizetési műveletekkel kapcsolatos egyéb költségek, ha a számla fenntartását a hitelező nem írja elő az adott hitelszerződéshez és költségeit a fogyasztóval kötött szerződésben egyértelműen és külön feltüntették.

THM kiszámítása

$$\boldsymbol{THM = H = \sum_{k=1}^{m} \frac{C_k}{(1+i)^{tk}}}$$

Ahol H: a hitel összege csökkentve a hitel felvételével összefüggő – pénzügyi intézménynek fizetendő – költségekkel

i: THM századrésze

tk: a k-adik törlesztőrészlet években vagy törtévekben kifejezett időpontja

m: törlesztőrészletek száma

24. példa

A ZUG-WEST Adótanácsadó Kft. bővíteni szeretné a tevékenységi körét. A könyvelési munkák elvállalásához néhány számítógép megvásárlása szükséges, 5 MFt értékben. A beruházás finanszírozásához szükséges pénzmennyiség teljes összege nem áll a Kft. rendelkezésére, ezért 2 MFt fejlesztési hitelt kért az Invest Banktól. A hitelkérelem elbírálása után a bank hajlandó volt a 2 MFt-ot egy összegben folyósítani. Az adósságot 4 év alatt, évente azonos részletekben kell megfizetni. Az első törlesztés a folyósítás után 1 évvel esedékes. A kamatláb évi 24%. A bank a hitel teljes összegének 3%-át egyszeri kezelési költségként, 25 000 Ft-ot hitelbírálati díjként és további 30 000 Ft-ot hitelfolyósítási díjként számolta fel. A járulékos költségek a kölcsön folyósításának napján esedékesek.

Feladat: Számítsa ki a teljes hiteldíjat és a teljes hiteldíj mutatót (THM)!

Megoldás:

Teljes hiteldíj: az az összeg, amelyet a hitelfelvevőnek – a tőkeösszeg visszafizetésén felül – fizetnie kell.

Az éves adósságszolgálat összegének kiszámítása

$$C = \frac{PV}{AF} = \frac{2\,000\,000}{\frac{(1+0{,}24)^4 - 1}{0{,}24 \times (1+0{,}24)^4}} = 831\,851 \; (\textit{évente fizetendő adósságszolgálat}$$

(AF = 2,404)

A kamat összege:

(831 851*4) – 2 000 000 = 1 327 404 Ft → 4 év alatt

a teljes hiteldíj összege:

- Kamat (a 4 év alatt fizetett összeg):	1 327 404 Ft	
- Kezelési költség (2 000 000 Ft * 0,03)	60 000 Ft	
- Hitelbírálati díj	25 000 Ft	115 000
- Hitelfolyósítási díj	30 000 Ft	
A teljes hiteldíj:	1 442 404 Ft	

$$\boldsymbol{THM = H = \sum_{k=1}^{m} \frac{C_k}{(1+i)^{tk}}}$$

H= 2 000 000-115 000=1 885 000 Ft

$$1\,885\,000\ Ft = \frac{831\,851}{(1+i)^1} + \frac{831\,851}{(1+i)^2} + \frac{831\,851}{(1+i)^3} + \frac{831\,851}{(1+i)^4} \text{ (n-ed fokú egyenlet!)}$$

THM = 27,35% (iterációs módszerrel meghatározva)